

Приложение к журналу

# КВАНТ

№5/96

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

*Выпуск 3*

Бюро



Квантум

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

*Выпуск 3*

*Под редакцией  
А.А.Егорова*



Москва 1996  
Бюро «Квантум»

ББК 22.151.0  
П691  
УДК 514.112(075.4)

Приложение  
к журналу «Квант»  
№ 5/96

**П691 Практикум абитуриента: Геометрия, Выпуск 3/Под ред. А.А.Егорова. — М.: Бюро Квантум, 1996. — 128с. (Прил. к журналу «Квант» №5/96)  
ISBN 5-85843-021-X**

Книга представляет собой сборник статей по стереометрии, опубликованных в разные годы в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента»

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам.

ББК 22.151.0

ISBN 5-85843-021-X

© Бюро Квантум  
«Квант», 1996

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Прямая и плоскость. <i>Л.Евтушик</i>	5
Расстояния между скрещивающимися прямыми. <i>М.Крайzman</i>	13
Плоскость в пространстве. <i>А.Назаретов</i>	22
Развивайте пространственное воображение. <i>Н.Федин</i>	26
Чертеж в стереометрических задачах. <i>И.Шарыгин</i>	32
Неожиданный ракурс. <i>В.Дубровский</i>	40
Эти «коварные» векторы. <i>В.Чехлов</i>	49
Правильная пирамида. <i>В.Егоров, А.Мордкович</i>	56
Высота пирамиды. <i>М.Крайzman</i>	63
Где расположено основание высоты?. <i>И.Мельник</i>	70
Задачи на площади и двугранные углы. <i>Я.Сухонник, П.Горнштейн</i>	76
Достраивание тетраэдра. <i>И.Шарыгин</i>	81
Задачи о пересечении тел. <i>И.Шарыгин</i>	87
Вспомогательный куб. <i>М.Либерзон</i>	95
Стереометрические задачи с шарами. <i>М.Либерзон</i>	102
Сфера, касающаяся ребер многогранника. <i>М.Крайzman</i>	108
Нестандартные задачи по стереометрии. <i>С.Овчинников, И.Шарыгин</i>	115
Ответы	124

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Перед вами третий сборник статей по геометрии, публиковавшихся в журнале «Квант» под рубрикой «Практикум абитуриента» в разные годы. Здесь собраны статьи по стереометрии, тематика которых несколько более изысканна, чем в предыдущих выпусках. Едва ли не большая часть собранных здесь статей посвящена вопросам, слабо отраженным в учебной и методической литературе, так что эта книжка будет интересна и полезна не только абитуриентам, но и учителям, и школьникам старших классов, и руководителям кружков, и любителям математики, находящим удовольствие в решении трудных задач.

В 1962 году поступающие на механико-математический факультет МГУ столкнулись с такой задачей.

**Задача 1.** *В треугольной пирамиде  $ABCD$  высота  $AK$  проходит через точку  $K$  пересечения высот основания  $BCD$ , а боковые ребра  $AB$  и  $AC$  взаимно перпендикулярны. Найдите отношение площадей боковых граней  $ADB$  и  $ADC$ , если  $AB = b$ ,  $AC = c$ .*

Это столкновение было не в пользу большинства школьников. Почему? Так ли уж трудна задача? Мы советуем вам подумать самостоятельно над этой и другими поучительными конкурсными задачами, которые здесь будут рассматриваться, а если у вас будут затруднения, мы попробуем вместе разобраться в причинах неудачи.

Многие, по-видимому, решили, что все зависит от хитроумных вычислений, потому что привыкли решать в школе в основном задачи на вычисление. А между тем изюминка задачи заключалась «только» в том, чтобы доказать, что  $AD \perp AB$ ,  $AD \perp AC$ , и тогда все просто:

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{2} AD \cdot b,$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{2} AD \cdot c,$$

$$\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{b}{c}.$$

Таким образом, главное в задаче — это доказательство факта, который, как мы увидим, основан на важном разделе стереометрии «Прямые и плоскости». Мы еще вернемся к нашему примеру. А сейчас подчеркнем, что причина многих неудач в стереометрии — это недооценка раздела «Прямые и плоскости». Теоремы этого раздела часто усваиваются формально и не закрепляются

на решении достаточного числа серьезных стереометрических задач. Между тем решение стереометрической задачи почти всегда опирается на теоремы, выражающие отношения между прямыми и плоскостями: параллельность и перпендикулярность, углы и расстояния, принадлежность и пересечение. Будет очень полезно, если, разбирая наши решения, вы подметите места, где применяется та или иная теорема, и сформулируете четко каждую из них.

Возьмем отношение перпендикулярности прямой и плоскости, которое играет решающую роль в первой задаче, да и во многих других задачах. Известна такая теорема.

**Теорема 1.** Если прямая  $h$  перпендикулярна двум прямым  $m$  и  $n$  плоскости  $P$ , проходящим через точку  $K$  пересечения  $h$  с плоскостью  $P$ , то прямая  $h$  перпендикулярна любой прямой плоскости  $P$ , проходящей через  $K$ .

В этом случае говорят, что прямая  $h$  перпендикулярна плоскости  $P$ . Из теоремы 1 легко вывести более общее утверждение.

**Теорема 2.** Если прямая  $h$  перпендикулярна двум произвольным непараллельным прямым  $a$  и  $b$  плоскости  $P$ , то  $h$  перпендикулярна любой прямой плоскости  $P$ .

В самом деле, возьмем произвольную прямую  $c$  в плоскости  $P$  и проведем через точку  $K$  три прямые:  $a' \parallel a$ ,  $b' \parallel b$ ,  $c' \parallel c$  (рис.1). По условию  $h \perp a$ , а это значит, что, в соответствии с определением угла между скрещивающимися прямыми (в нашем случае  $h$  и  $a$ ),  $h \perp a'$ . Аналогично  $h \perp b'$ . Так как  $a'$  и  $b'$  не совпадают (ибо по условию  $a$  не параллельна  $b$ ), то из теоремы 1 следует, что  $h \perp c'$ . Но  $c \parallel c'$ , поэтому  $h \perp c$ .

Вспомните теперь условие задачи 1 и посмотрите на рисунок 2. Замечаем, что так как прямая  $AK$  перпендикулярна плоскости  $BCD$ , то  $DC \perp AK$ . Но  $DC \perp MB$  (по условию  $MB$  — высота грани  $BCD$ ). Следовательно, по теореме 2  $DC$  перпендикулярна плоскости  $ABK$ . Прямая  $AB$  лежит в этой плоскости, значит,  $DC \perp AB$ . А теперь вспомним, что по условию задачи  $AB \perp AC$ .

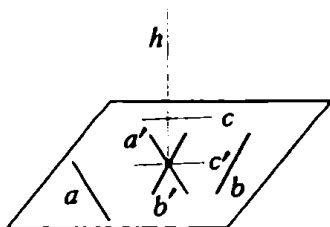


Рис. 1

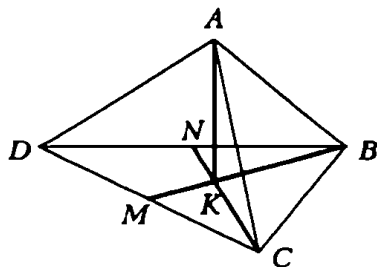


Рис. 2

Итак,  $AB \perp DC$  и  $AB \perp AC$ , откуда по теореме 2  $AB$  перпендикулярна плоскости  $ACD$ , и, значит,  $AB \perp AD$ . Аналогично доказывается, что  $AC \perp AD$ . Далее следуют те нехитрые вычисления, которые мы уже привели вначале. Как видите, все решение задачи состоит по существу в двукратном применении теоремы 2 с полным использованием тех свойств пирамиды, которые даны в условии задачи.

Одному из этих свойств (некоторая высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот противоположной грани) мы уделим внимание в связи с последующей задачей. Назовем такие треугольные пирамиды *ортоцентрическими*. Если внимательно просмотреть решение задачи 1, то можно заметить там доказательство такого утверждения:

*У ортоцентрической пирамиды каждая пара противоположных ребер взаимно перпендикулярна.*

Докажите сами обратное утверждение:

*Если каждая пара противоположных ребер треугольной пирамиды взаимно перпендикулярна, то эта треугольная пирамида — ортоцентрическая.*

После доказательства этого утверждения можно сделать такой вывод:

*У ортоцентрической пирамиды любая высота проходит через точку пересечения высот противоположной грани (подумайте, почему?).*

Теперь мы докажем еще одно свойство ортоцентрической пирамиды.

**Задача 2.** Длины ребер ортоцентрической пирамиды  $ABCD$  связаны соотношением

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

**Решение.** В этой задаче существенную роль играет следующее построение. Через каждую пару скрещивающихся ребер пирамиды (на рисунке 3 они окрашены в черный цвет) всегда можно провести пару параллельных плоскостей. Три такие пары плоскостей «вырезают» в пространстве параллелепипед. Через каждую вершину пирамиды пройдет только три плоскости из шести, стало быть вершина пирамиды будет и вершиной параллелепипеда. Каждое ребро пирамиды  $ABCD$  будет принадлежать по построению только

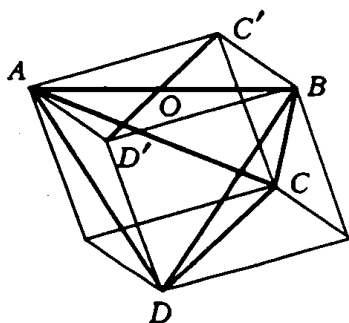


Рис.3



одной из шести плоскостей и, следовательно, будет диагональю соответствующей грани построенного параллелепипеда. Теперь настало время вспомнить, что пирамида  $ABCD$  ортоцентрическая, и потому у нее противоположные ребра взаимно перпендикулярны:  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD \perp BC$ . Отсюда следует, что диагонали каждой грани параллелепипеда взаимно перпендикулярны (например,  $AB \perp D'C'$ ), т.е. все грани параллелепипеда — ромбы, а значит, длины всех ребер параллелепипеда равны одному числу — обозначим его через  $a$ . Далее находим

$$AB^2 + D'C'^2 = (2AO)^2 + (2D'O)^2 = 4AD^2 = 4a^2.$$

Но  $D'C' = DC$ , поэтому находим  $AB^2 + DC^2 = 4a^2$ , и аналогично  $AC^2 + BD^2 = 4a^2$ ,  $AD^2 + BC^2 = 4a^2$ , что и доказывает утверждение задачи.

**Задача 3.** Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными  $a$ . Найдите периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна  $a\sqrt{5}/2$ .

**Решение** этой задачи достаточно длинное, и поэтому мы выделим те этапы, на которое оно распадается.

**Обозначения.** Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник (рис. 4) и  $AB = a\sqrt{5}/2$ . Обозначим взаимно перпендикулярные плоскости буквами  $Q'$  и  $Q''$ , а линию их пересечения буквой  $l$ . Пусть  $B'$  — проекция точки  $B$  на  $Q'$ , а  $B''$  — проекция  $B$  на  $Q''$ . Аналогично,  $D'$  — проекция  $D$  на  $Q'$  и  $D''$  — проекция  $D$  на  $Q''$ . Предположим, что точка  $A$  лежит на прямой  $l$ . Это предположение, а также другие факты, облегчающие вычисление искомого периметра  $ABCD$ , мы должны обосновать.

**Обоснования.** 1. Проекция четырехугольника  $ABCD$  на любую плоскость  $P$  не изменится, если плоскость  $P$  заменить плоскостью  $P' \parallel P$  (рис. 5).

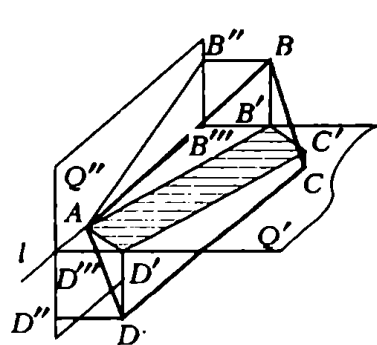


Рис. 4

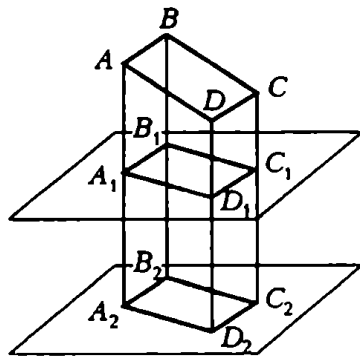


Рис. 5

Действительно, фигура  $A_1D_1C_1B_1A_2D_2C_2B_2$  — прямоугольная призма, а две проекции четырехугольника ( $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$ ) — ее равные основания. Поэтому проекции четырехугольника  $ABCD$  останутся по-прежнему квадратами со стороной  $a$ , если мы будем считать, что плоскости  $Q'$  и  $Q''$  каждая параллельно самой себе перенесены в точку  $A$ . Это упростит чертеж и вычисления.

2. Если проекция четырехугольника  $ABCD$  — квадрат, то сам четырехугольник  $ABCD$  — параллелограмм.

Это следует из того, что плоскость  $ADD_1A_1$  (рис.5) параллельна плоскости  $BCC_1B_1$  ( $A_1D_1 \parallel B_1C_1$  и  $AA_1 \parallel BB_1$ ), а в таком случае  $AD \parallel BC$ ; аналогично  $AB \parallel DC$ .

3. По условию  $AB' = AB'' = a$ . Проведем через проектирующие перпендикуляры  $BB'$  и  $BB''$  (рис.4) плоскость  $BB'B''B'''$ . Эта плоскость перпендикулярна и плоскости  $Q'$ , и плоскости  $Q''$  (по какой теореме?).

Поэтому прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $BB'B''B'''$  и  $\angle B'B''B''' = 90^\circ$  (плоскости  $Q'$  и  $Q''$  перпендикулярны). Таким образом,  $BB'B''B'''$  — прямоугольник. Но прямоугольный треугольник  $ABB'$  равен треугольнику  $ABB''$  (вспомним, что  $AB' = AB'' = a$ ), поэтому  $BB' = BB''$  и, значит,

$$BB' = B'B'''.$$

Аналогично доказывается, что

$$DD' = D'D'''$$

(как бы ни располагалась точка  $D$  относительно плоскостей  $Q'$  и  $Q''$ ).

На этой основе проводим, наконец, несложные подсчеты.

**Вычисления.** Так как по условию  $AB = a\sqrt{5}/2$  и  $AB' = a$ , то  $B'B''' = BB' = \sqrt{(a\sqrt{5}/2)^2 - a^2} = a/2$ . Следовательно, в прямоугольном треугольнике  $AB'B'''$  выполняются соотношения:  $B'B''' = \frac{1}{2}AB'$  и  $\angle B'AB''' = 30^\circ$ . Но  $\angle B'AD' = 90^\circ$ , значит,  $\angle D'AD''' = 60^\circ$ . Зная теперь, что  $AD' = a$ , находим

$$DD' = D'D''' = a\sqrt{3}/2.$$

И, наконец, из прямоугольного треугольника  $ADD'$  находим

$$AD = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7}.$$

Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то его периметр равен

$$2(AB + AD) = a(\sqrt{5} + \sqrt{7}).$$

**Задача 4.** Из концов отрезка  $AB = a$  исходят два луча  $Ax \perp AB$  и  $By \perp AB$ , причем  $Ax \perp By$ . На луче  $Ax$  отложен отрезок  $AP = u$ , а на луче  $By$  — отрезок  $BQ = v$  так, что  $2uv = a^2$ . Докажите, что расстояние от середины отрезка  $AB$  до прямой  $PQ$  равняется  $a/2$ .

Если вдуматься в условие задачи, то можно заметить неожиданность факта, который нам предстоит доказать. В самом деле, отрезок  $PQ$  (рис. 6) не занимает фиксированного положения, так как отрезки  $AP = u$  и  $BQ = v$  могут меняться, лишь бы только  $2uv = a^2$  оставалось постоянным. И тем не менее расстояние от середины  $AB$  до подвижного отрезка  $PQ$  должно оставаться неизменным, а именно  $a/2$ .

**Решение.** Так как  $AB \perp AP$ , то  $BP^2 = u^2 + a^2$ . Но  $BQ \perp AB$  и  $BQ \perp AP$  (по условию), следовательно, по теореме 2 прямая  $BQ$  перпендикулярна плоскости  $ABP$  и, значит  $BQ \perp BP$ , т.е.  $\triangle BQP$  — прямоугольный, и  $PQ^2 = BP^2 + BQ^2 = u^2 + a^2 + v^2$ . А так как  $2uv = a^2$ , то  $PQ^2 = u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2$ , т.е.  $PQ = u + v$ .

Итак, мы обнаружили, что всегда  $PQ = BQ + AP$ . Этот факт, как мы увидим, и является причиной того, что  $OK = AB/2$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно внимательно присмотреться к рисунку 6, увидеть его пространственно. Если мысленно оторвать прямоугольные треугольники  $OBQ$  и  $OAP$  от фигуры, поместить их в одну плоскость с треугольником  $OPQ$ , то можно заметить, что треугольник, сложенный из  $OBQ$  и  $OAP$  (рис. 7, а), оказывается равным треугольнику  $OPQ$  (рис. 7, б) именно потому, что  $PQ = PA + BQ$ . Это доказывает, что  $OK = a/2$ .

**Задача 5.** Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите объем пирамиды,

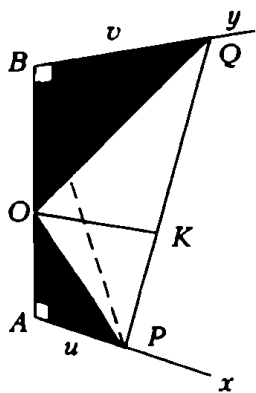
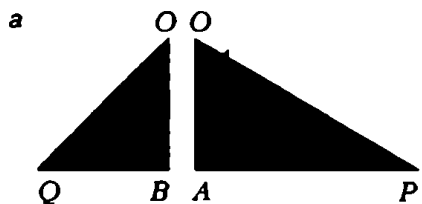


Рис. 6



б

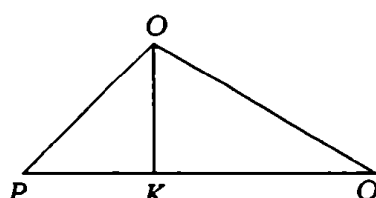


Рис. 7

если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

**Решение.** Пусть  $ABCD$  – данная пирамида (рис.8), где, согласно условию,  $AB = AC = BD = CD$  и  $AD = BC$  (нетрудно показать, что в точности два противоположных ребра пирамиды должны равняться основанию равнобедренного треугольника). Обозначим длину высоты  $DK$  пирамиды через  $h$  (мы пока не знаем, где лежит точка  $K$ ). Нам предстоит прежде всего выяснить, какие ребра пирамиды будут наибольшими и в какой грани лежит высота пирамиды.

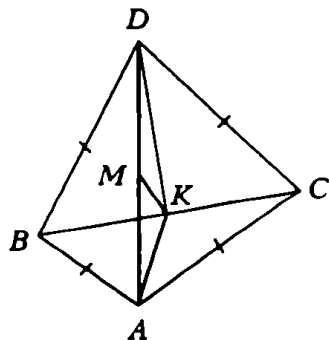


Рис.8

Высота пирамиды не может лежать ни в грани  $ADC$ , ни в равной ей грани  $ABD$ , так как аналогичная высота другой грани была бы больше  $h$  (длина наклонной больше длины перпендикуляра). Поэтому высота пирамиды  $DK$  должна лежать в грани  $BDC$ , и, значит,  $DK \perp AK$ . Но по условию  $DK = AK = h$ , поэтому  $AD = BC = h\sqrt{2}$ ,  $KC = h\sqrt{2}/2$  и

$$DC = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{2}\sqrt{2}\right)^2} = h\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Итак, ребра  $AD$  и  $BC$  больше ребер  $AB$ ,  $AC$ ,  $BD$ ,  $CD$ . Опустим из точки  $K$  перпендикуляр на ребро  $AD$ :  $KM \perp AD$ . Раз  $BC \perp DK$  и  $BC \perp AK$ , то  $BC \perp KM$ . Следовательно,  $KM$  есть общий перпендикуляр ребер  $AD$  и  $BC$ , и по условию он равен 1; но в равнобедренном прямоугольном треугольнике  $ADK$  выполняются равенства  $KM = AD/2 = h\sqrt{2}/2$ , откуда  $h\sqrt{2}/2 = 1$ ,  $h = \sqrt{2}$ .

**Задача 6.** В треугольной пирамиде  $SABC$  плоские углы при вершине  $S$  – прямые. Докажите, что вершина  $S$ , точка  $G$  пересечения медиан основания  $ABC$  и центр  $O$  описанного около пирамиды шара принадлежат одной прямой.

**Решение.** Точка  $P$  (рис.9) является центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , так как  $AP = PC$ ,  $\angle ASC = 90^\circ$ . Прямая, соединяющая центр шара с центром окружности сечения, перпендикулярна плос-

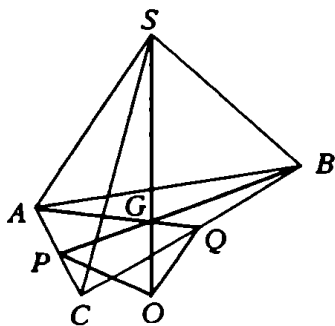


Рис.9

кости сечения, т.е.  $PO \perp ACS$ . Аналогично  $QO \perp BCS$ . Но  $SB \perp ACS$  и  $AS \perp BCS$ , потому что все плоские углы при вершине  $S$  — прямые. Значит,  $PO \parallel SB$ , и точки  $P, O, S$  и  $B$  лежат в одной плоскости, а также  $OQ \parallel AS$ , и точки  $O, Q, A$  и  $S$  лежат в одной плоскости. У этих плоскостей есть две (несовпадающие) общие точки  $S$  и  $O$ , поэтому прямая  $SO$  — линия пересечения этих плоскостей. В первой плоскости лежит медиана  $BP$ , а во второй — медиана  $AQ$ , следовательно, точка  $G$  пересечения медиан лежит в обеих плоскостях, т.е. на прямой  $SO$  пересечения плоскостей, а это и требовалось доказать.

### Упражнения

1. Докажите теорему о трех перпендикулярах, опираясь на теорему 2.
2. Докажите, что ортоцентрическими пирамидами являются все правильные треугольные пирамиды и все треугольные пирамиды с прямыми плоскими углами при вершине.
3. Прямоугольные проекции треугольника  $ABC$  на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = \sqrt{5}/2$ .
4. Отрезок  $AB$  единичной длины, являющийся хордой сферы с радиусом 1, расположен под углом  $\pi/3$  к диаметру  $CD$  этой сферы. Расстояние от конца  $C$  диаметра до ближайшего к нему конца  $A$  хорды равно  $\sqrt{2}$ . Определите величину отрезка  $BD$ .
5. Основание четырехугольной пирамиды — квадрат, а все боковые грани — прямоугольные треугольники, у которых вершины прямых углов лежат на основании пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна единице, а один из двугранных углов при вершине равен  $120^\circ$ .
6. В треугольной пирамиде  $SABC$  все ребра равны друг другу. На ребре  $SA$  взята точка  $M$  такая что  $SM = MA$ , на ребре  $SB$  — точка  $N$  такая, что  $SN = SB/3$ . Через точки  $M$  и  $N$  проведена плоскость, параллельная медиане  $AD$  основания  $ABC$ . Найдите отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды  $SABC$ .
7. Три зеркала образуют трехгранный угол, все двугранные углы которого прямые. Покажите, что луч света, пришедший в этот трехгранный угол по прямой  $l$ , после отражения от зеркальных поверхностей уйдет по прямой, параллельной  $l$ .
8. Постройте отрезок, имеющий заданную длину, параллельный данной плоскости, причем концы отрезка должны лежать на двух данных скрещивающихся прямых.

# РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

М. Крайзман

При решении задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми полезно различать два случая:

- 1) скрещивающиеся прямые перпендикулярны;
- 2) скрещивающиеся прямые не перпендикулярны.

Если скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  перпендикулярны (1-й случай), то проще всего через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную к другой прямой (рис. 1; из произвольной точки  $M$  на прямой  $a$  опущен перпендикуляр  $OM$  на прямую  $b$ , плоскость  $\alpha$  определяется двумя пересекающимися прямыми  $a$  и  $MO$ , потому что  $b \perp a$  по условию и  $b \perp OM$  по построению, следовательно,  $b \perp \alpha$  по обобщенному признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Затем из точки  $O$  пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $b$  надо опустить перпендикуляр  $ON$  на прямую  $a$ ,  $ON$  — искомое расстояние.

**Задача 1.** Определите расстояние между диагональю куба с ребром  $a$  и скрещивающейся с ней диагональю грани.

**Решение.** Будем определять расстояние между  $B_1D$  и  $D_1C$  (рис. 2). Так как  $D_1C \perp DC_1$ , а  $DC_1$  — проекция  $B_1D$  на плоскость  $DD_1C_1C$ , то  $D_1C \perp B_1D$  (по обобщенной теореме о трех перпендикулярах). Из соотношений  $D_1C \perp DC_1$  и  $D_1C \perp B_1D$  следует (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), что  $D_1C$

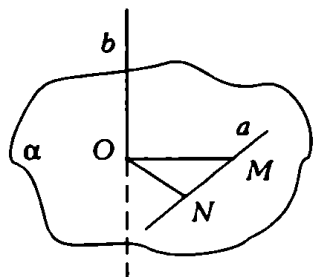


Рис. 1

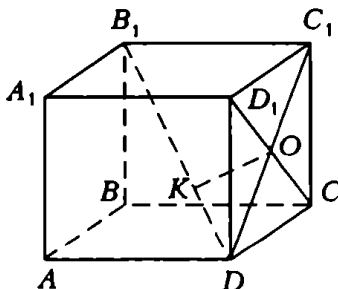


Рис. 2

перпендикулярна плоскости  $DB_1C_1$ . Пусть  $O$  — точка пересечения  $D_1C$  и  $DC_1$ . Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $OK$  на  $B_1D$ ,  $OK$  — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми  $B_1D$  и  $D_1C$ . Найдем его. Для этого заметим, что прямоугольные треугольники  $OKD$  и  $B_1DC_1$  подобны и  $OK : B_1C_1 = OD : B_1D$ . Отсюда

$$OK = a\sqrt{6}/6.$$

Прежде чем перейти к следующим задачам, докажем теорему, выражающую зависимость между углами трехгранного угла, в котором две грани взаимно перпендикулярны.

**Теорема 1.** Если две грани трехгранного угла взаимно перпендикулярны, то косинус плоского угла грани, лежащей против прямого двугранного угла, равен произведению косинусов плоских углов граней, ограничивающих этот прямой двугранный угол.

**Доказательство.** На рисунке 3 плоскости  $ASB$  и  $BSC$  перпендикулярны,  $\angle ASC = \alpha$ ,  $\angle ASB = \beta$ ,  $\angle BSC = \gamma$ . Мы хотим доказать, что  $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ . Для этого из точки  $M$  на ребре  $SA$  опустим перпендикуляры  $MO$  на  $BS$  и  $MN$  на  $SC$ . Соединим точки  $N$  и  $O$ . Согласно теореме о трех перпендикулярах  $SC \perp NO$ .

Из  $\triangle SMO$  и  $\triangle SON$  находим

$$\cos \beta = \frac{SO}{SM}, \quad \cos \gamma = \frac{SN}{SO}.$$

Перемножим данные равенства:  $\cos \beta \cdot \cos \gamma = SN/SM$ , и найдем  $\cos \alpha$  из  $\triangle SNM$ :  $\cos \alpha = SN/SM$ . Отсюда  $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ . Теорема доказана.

**Задача 2.** Каждое ребро треугольной призмы равно  $a$ . Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы, каждый из которых равен  $\alpha$ . Определите расстояние между этим ребром и скрещивающейся с ним стороной основания.

**Решение.** Требуется определить расстояние между  $AA_1$  и  $BC$  (рис. 4). Известно, что если наклонная, исходящая из вершины угла, образует со сторонами этого угла равные углы, то проекция наклонной на плоскость угла будет его биссектрисой. Поэтому  $AO$

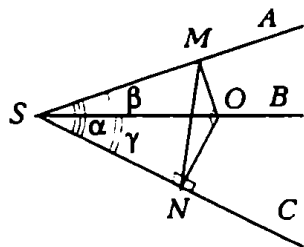


Рис. 3

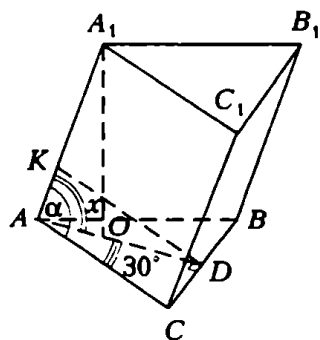


Рис. 4

— биссектриса угла  $BAC$ . Но  $\triangle ABC$  — правильный, продолжение  $AD$  биссектрисы будет высотой этого треугольника и поэтому  $AD \perp BC$ . По обобщенной теореме о трех перпендикулярах  $BC \perp AA_1$ , а на основании обобщенного признака перпендикулярности прямой и плоскости  $BC$  перпендикулярна плоскости  $DAA_1$ . Опустим из точки  $D$  перпендикуляр  $DK$  на  $AA_1$ ;  $DK$  — искомое расстояние между  $BC$  и  $AA_1$ . Пусть  $\angle A_1AO = x$ ; применив теорему 1 к трехгранному углу  $AA_1DC$ , получим:  $\cos \angle A_1AC = \cos \angle A_1AD \cdot \cos \angle DAC$ ;  $\cos \alpha = \cos x \cos 30^\circ$ . Отсюда

$$\cos x = \frac{\cos \alpha}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \cos \alpha}{3}.$$

Осталось найти  $KD$  из  $\triangle AKD$ :

$$\begin{aligned} KD &= AD \cdot \sin x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \cos^2 x} = \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} = \frac{a}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

или, при  $\cos \alpha \neq 0$ ,

$$KD = \frac{a}{2} \sqrt{-\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}},$$

причем  $\pi/6 < \alpha < 5\pi/6$ .

Теперь рассмотрим случай, когда скрещивающиеся прямые не перпендикулярны между собой. Так как в задачах на вычисление нет необходимости строить перпендикуляр к данным двум скрещивающимся прямым, а надо лишь определить расстояние между ними, то для этого достаточно через одну из скрещивающихся прямых  $b$  (рис. 5) провести плоскость  $\alpha$ , параллельную второй прямой  $a$ , и найти расстояние  $MN$  от произвольной точки  $M$  прямой  $a$  до плоскости  $\alpha$ ; оно равно длине отрезка перпендикуляра  $OO_1$  к данным двум скрещивающимся прямым. Если мы еще проведем через прямую  $a$  плоскость  $\beta$ , параллельную  $\alpha$ , то  $OO_1$  будет равно расстоянию от любой точки  $P$  на одной плоскости до ее проекции  $Q$  на вторую плоскость ( $PQ \perp \alpha, \beta$ ).

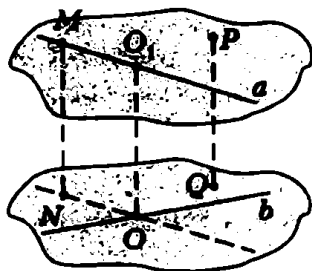


Рис. 5

**Задача 3.** Определите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно  $a$ .

**Решение.** На рисунке 6, а прямые  $AB_1$  и  $BC_1$  скрещиваются (для прямых  $BA_1$  и  $CB_1$  рассуждения аналогичны). Плоскости



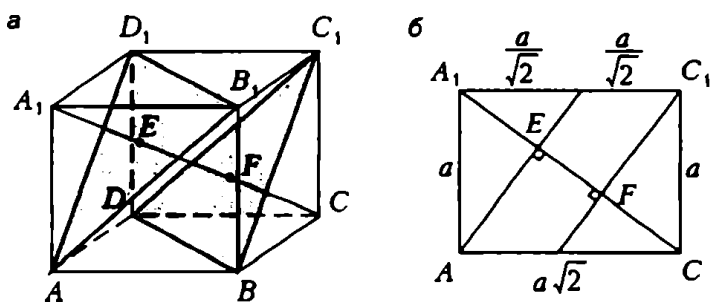


Рис.6

$AD_1B_1$  и  $BDC_1$  параллельны (так как  $AB_1 \parallel DC_1$ ,  $AD_1 \parallel BC_1$ ) и содержат прямые  $AB_1$  и  $BC_1$ . Прямая  $A_1C$  является общим перпендикуляром к этим плоскостям, потому что она перпендикулярна к прямым  $AE$ ,  $D_1E$  и  $C_1F$ ,  $BF$  — достаточно рассмотреть сечения  $ACC_1A_1$  (рис. 6,б) и аналогично  $A_1BCD_1$ . Из рисунка 6,б легко находим:  $A_1E = EF = FC = a\sqrt{3}/3$ . Но  $EF$  — это искомое расстояние.

**Задача 4.** Определите расстояние между скрещивающимися высотами граней правильного тетраэдра с ребром  $a$ .

**Решение.** Определим расстояние между  $BD$  и  $SM$  (рис. 7). Для этого через точку  $M$  проведем  $ME \parallel BD$ . Плоскость  $SME$  и  $BD$  параллельны. Найдем расстояние от точки  $O$ , принадлежащей  $BD$ , до плоскости  $SME$ . Для этого проведем  $OK \perp ME$  и соединим точки  $S$  и  $K$ ;  $ME \perp SK$ , откуда  $ME \perp SOK$ , а из этого следует, что  $SOK \perp SME$ .

Перпендикуляр  $OP$ , опущенный из точки  $O$  на плоскость  $SME$ , лежит в плоскости  $SOK$ , а основание его — точка  $P$  — лежит на прямой  $SK$ , являющейся линией пересечения этих двух взаимно перпендикулярных плоскостей.

Из подобия  $\triangle SOK$  и  $\triangle OPK$  находим  $OP = SO \cdot OK / SK$ . Далее, подставляя  $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a\sqrt{6}/3$ ;  $OK = DE = a/4$ ;  $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = a\sqrt{105}/12$ , находим  $OP = a\sqrt{70}/35$ .

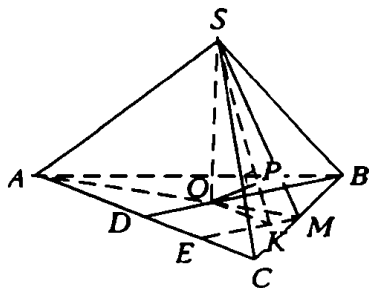


Рис.7

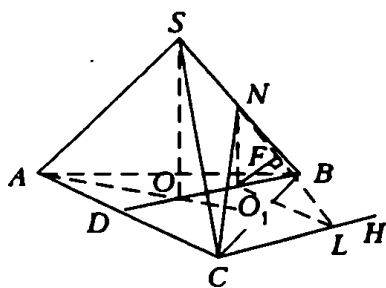


Рис.8

Аналогично находится расстояние между  $BD$  и  $CN$  (рис. 8). Плоскость  $NCH$  параллельна  $BD$ . Строим плоскость  $NO_1L$ , перпендикулярную к  $NCH$ . Тогда искомым расстоянием будет длина отрезка перпендикуляра  $O_1F$ , опущенного из точки  $O_1$  на плоскость  $NCH$ . Из подобия  $\triangle NO_1L$  и  $\triangle NO_1F$  находим  $O_1F = NO_1 \cdot O_1L/NL$ , и, подставляя все величины, находим  $O_1F = a\sqrt{10}/10$ .

Рассмотрим другие методы решения задач на определение расстояния между скрещивающимися прямыми. Один из этих методов базируется на теореме об объеме треугольной пирамиды.

**Теорема 2.** Объем треугольной пирамиды равен одной шестой произведения длин двух любых ее скрещивающихся ребер на расстояние между ними и на синус угла между ними.

**Доказательство.** Из произвольной вершины, например  $B_1$ , параллелепипеда  $AC_1$  проведем диагонали  $B_1A$ ,  $B_1D_1$ ,  $B_1C$  граней, сходящихся в этой вершине (рис. 9). Концы этих диагоналей соединим между собой. Получим пирамиду  $B_1AD_1C$ , которая называется вписанной в параллелепипед (а параллелепипед, наоборот, описанным вокруг этой пирамиды; его легко построить, проводя пары параллельных плоскостей через противоположные ребра пирамиды).

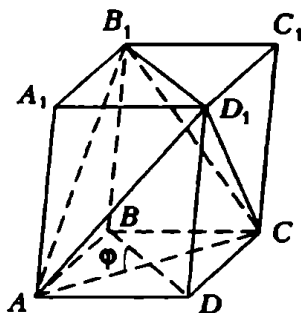


Рис.9

Объем параллелепипеда равен

$$V_{AC_1} = V_{B_1AD_1C} + V_{D_1ADC} + V_{B_1ABC} + V_{A_1B_1D_1} + V_{CB_1C_1D_1}.$$

Так как

$$V_{D_1ADC} = V_{B_1ABC} = V_{A_1B_1D_1} = V_{CB_1C_1D_1}$$

(основания этих пирамид равновелики и равны половине площади основания параллелепипеда, а высоты их равны высоте  $h$  параллелепипеда), то

$$V_{B_1AD_1C} = V_{AC_1} - 4V_{D_1ADC} = V_{AC_1} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} Sh = V_{AC_1} - \frac{2}{3} Sh = \frac{1}{3} V_{AC_1}.$$

Итак, объем вписанной треугольной пирамиды составляет одну треть объема описанного параллелепипеда, или, после

преобразования,

$$V_{B_1AD_1C} = \frac{1}{3} V_{AC_1} = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi \right) \cdot h = \\ = \frac{1}{6} AC \cdot B_1D_1 \cdot h \cdot \sin \varphi.$$

При решении задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми можно использовать особенности описанного параллелепипеда в зависимости от свойств вписанной треугольной пирамиды. Например, попробуйте самостоятельно доказать, что если в пирамиде два скрещивающихся ребра

а) равны, то у описанного параллелепипеда грани, в которых лежат эти ребра, будут прямоугольниками;

б) перпендикулярны, то соответствующие грани будут ромбами;

в) равны и перпендикулярны, то соответствующие грани будут квадратами.

**Задача 5.** В треугольной пирамиде противоположные (скрещивающиеся) ребра попарно равны между собой и соответственно равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найдите расстояние между ними.

**Решение.** Противоположными гранями описанного параллелепипеда являются прямоугольники и потому сам параллелепипед будет прямоугольным (рис. 10). Искомые расстояния между

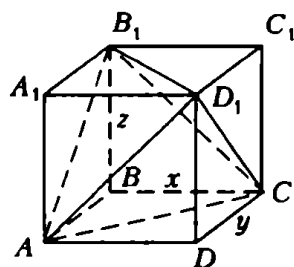


Рис. 10

скрещивающимися ребрами будут равны расстояниям между противоположными гранями, т.е. ребрам прямоугольного параллелепипеда.

Составим систему уравнений ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  — ребра параллелепипеда, см. рис.10):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2. \end{cases}$$

Сложив их почленно и разделив на 2, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

а вычитая из последнего уравнения каждое из уравнений системы и извлекая квадратный корень, найдем

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)}, \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2 - b^2)}, \quad z = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

**Задача 6.** Два противоположных ребра треугольной пирамиды соответственно равны 6 и 8, а каждое из остальных четырех ребер — по 13. Определите расстояние между скрещивающимися ребрами этой пирамиды.

**Решение.** Так как  $AB_1 = B_1C = AD_1 = D_1C$  (рис. 11), то все боковые грани параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — равные прямоугольники. Следовательно, в основании лежит ромб  $ABCD$ , а сам параллелепипед является прямым. Отсюда расстояние от  $AC$  до  $B_1 D_1$  равно  $BB_1$ , расстояния от  $AD_1$  до  $B_1 C$  равно расстоянию от  $AB_1$  до  $D_1 C$  и равно  $h$ , где  $h$  — высота ромба  $ABCD$ . Далее легко найти, что  $h = 4,8$ ,  $BB_1 = 12$  (сделайте это самостоятельно).

На следующей теореме основан алгебраический метод решения задач на определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

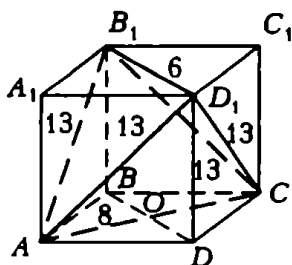


Рис. 11

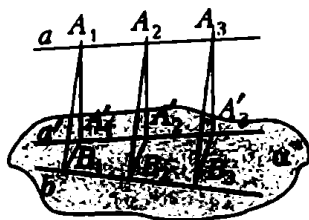


Рис. 12

**Теорема 3.** Пусть даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . На прямой  $a$  взяты точки  $A_1, A_2, A_3$  и из этих точек опущены перпендикуляры  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$  на прямую  $b$ . Тогда  $A_1 A_2 : A_2 A_3 = B_1 B_2 : B_2 B_3$ .

**Доказательство.** Проведем через прямую  $b$  произвольную плоскость  $\alpha$  (рис. 12) и рассмотрим ортогональную проекцию прямой  $a$  на эту плоскость; проекции точек  $A_1, A_2, A_3$  обозначим через  $A'_1, A'_2, A'_3$  соответственно. Из свойств параллельной проекции имеем

$$A_1 A_2 : A_2 A_3 = A'_1 A'_2 : A'_2 A'_3.$$

Соединим точки  $A_1, A_2, A_3$  соответственно с точками  $B_1, B_2, B_3$ . Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что  $A'_1 B'_1 \perp b$ ,  $A'_2 B'_2 \perp b$ ,  $A'_3 B'_3 \perp b$ , поэтому  $A'_1 B'_1 \parallel A'_2 B'_2 \parallel A'_3 B'_3$ . По теореме о пересечении двух прямых рядом параллельных прямых можем написать:

$$A'_1 A'_2 : A'_2 A'_3 = B_1 B_2 : B_2 B_3. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) непосредственно следует

$$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3.$$

**Задача 7.** В основании пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB = c$  и острым углом  $BAC$ , равным  $30^\circ$ . Боковая грань, проходящая через катет  $AC$ , перпендикулярна к плоскости основания, а две остальные образуют с ней угол, также равный  $30^\circ$ . Определите расстояние между  $SB$  и  $AC$ .

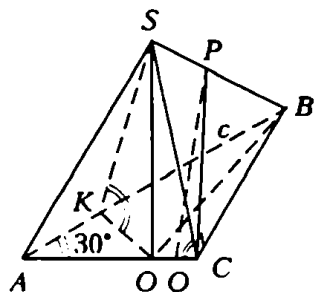


Рис. 13

**Решение.** Найдем проекцию отрезка  $SB$  на отрезок  $AC$ . Для этого из точек  $S$  и  $B$  опустим перпендикуляры  $SO$  и  $BQ$  на  $AC$  (рис. 13), и  $SK$  на  $AB$ ; тогда проекция  $SB$  на  $AC$  равна  $OQ$ . Найдем отношение  $OQ/SB$ . Из равенств  $\angle SKO = \angle SCO = 30^\circ$  следует, что  $OK = OC$  и  $OB$  — биссектриса угла  $ABC$ . Далее находим

$$BC = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}c, \quad OC = BC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{6},$$

$$SB = OC : \cos 30^\circ = \frac{1}{3}c, \quad SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \frac{c\sqrt{13}}{6}.$$

Следовательно,

$$\frac{OQ}{SB} = \frac{c\sqrt{3}}{6} : \frac{c\sqrt{13}}{6} = \sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Из произвольной точки  $P$ , взятой на  $SB$ , опустим перпендикуляр  $PQ$  на  $AC$ ; тогда проекцией  $PB$  на  $AC$  будет  $QC$ . Согласно теореме 3,  $OC : SB = QC : PB$ , откуда  $QC/PB = \sqrt{3/13}$ ; пусть  $QC = x\sqrt{3}$ ,  $PB = x\sqrt{13}$ . Применим к треугольнику  $CPB$  теорему косинусов:

$$PC^2 = \frac{c^2}{4} + 13x^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot x\sqrt{13} \cos \angle CBP. \quad (3)$$

Из  $\triangle SCB$  найдем

$$\cos \angle CBS = \frac{CB}{SB} = \frac{c}{2} : \frac{c\sqrt{13}}{6} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

и подставим в (3):

$$PC^2 = \frac{c^2}{4} + 13x^2 - cx\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 13x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4}.$$

Далее, из  $\triangle QPC$  имеем

$$QP^2 = CP^2 - QC^2 = 13x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4} - 3x^2 = 10x^2 - 3cx + \frac{c^2}{4}.$$

Наименьшее значение  $QP^2$  будет равно квадрату расстояния между скрещивающимися прямыми; найдем его. Если  $QP^2 = ax^2 + bx + c$ , то

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{3c}{20};$$

$$(QP^2)_{\min} = 10 \cdot \frac{9c^2}{400} - 3c \cdot \frac{3c}{20} + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{40}; \quad (QP)_{\min} = \frac{c\sqrt{10}}{20}.$$

### Упражнения

1. В основании пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) с катетом  $BC = a$  и прилежащим острым углом  $\alpha$ . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом  $\beta$ . Определите расстояние между гипотенузой  $AB$  и скрещивающимся с ней боковым ребром  $SC$ .

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ . Определите расстояние между апофемой пирамиды и скрещивающейся с ней стороной основания, если угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен  $60^\circ$ .

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равна  $a$ , а плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Определите расстояние между скрещивающимися ребрами этой пирамиды.

Известно, что график любого уравнения первой степени\*  $ax + by + cz + d = 0$  есть плоскость, перпендикулярная вектору с координатами  $(a; b; c)$ .

Отсюда вытекает, что плоскости, заданные уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad (2)$$

параллельны тогда и только тогда, когда существует такое  $\lambda$ , что  $a_2 = \lambda a_1$ ,  $b_2 = \lambda b_1$ ,  $c_2 = \lambda c_1$ .

Очевидно, плоскости с уравнениями (1), (2) совпадают тогда и только тогда, когда существует такое  $\lambda$ , что  $a_2 = \lambda a_1$ ,  $b_2 = \lambda b_1$ ,  $c_2 = \lambda c_1$ ,  $d_2 = \lambda d_1$ .

Подчеркнем еще раз. Переход от уравнения первой степени к плоскости (его графику) однозначен: каждое уравнение первой степени имеет графиком единственную, вполне определенную плоскость. (Поэтому говорят «плоскость с уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ » или даже «плоскость  $ax + by + cz + d = 0$ »). Обратный же переход — от плоскости (в координатном пространстве) к уравнению — совсем не однозначен: каждая плоскость может быть задана бесчисленным множеством уравнений; если плоскость  $\Delta$  является графиком уравнения  $ax + by + cz + d = 0$ , то она является также графиком любого уравнения  $(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + (\lambda d) = 0$ . Каждое из этих уравнений называется уравнением плоскости  $\Delta$ .

С другой стороны, в координатном пространстве каждая плоскость есть график некоторого уравнения первой степени.

---

\*Напомним, что уравнение  $ax + by + cz + d = 0$  называется уравнением первой степени, если по крайней мере один коэффициент при переменных отличен от нуля, т.е.  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ .

В частности, уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(x_1; y_1; z_1)$  и перпендикулярной (ненулевому) вектору  $\vec{n} = (a; b; c)$ , имеет вид  $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ .

Расстояние от точки  $K(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $ax + by + cz + d = 0$  равно

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Задача 1.** Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$  и проходящей через точку  $M(3; 2; 4)$ .

**Решение.** Плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$ , перпендикулярна вектору с координатами  $(1; 0; 0)$ . Поэтому искомое уравнение имеет вид  $1(x - 3) + 0(y - 2) + 0(z - 4) = 0$  или  $x - 3 = 0$ ,  $x = 3$ . Впрочем, последнюю форму ответа можно сообразить и непосредственно.

**Задача 2.** Найдите расстояние между параллельными плоскостями  $x - y + 2z - 4 = 0$  и  $x - y + 2z - 10 = 0$ .

**Решение.** Искомое расстояние равно, очевидно, расстоянию от произвольной точки плоскости  $x - y + 2z - 4 = 0$ , например от точки  $K(0; 0; 2)$ , до плоскости  $x - y + 2z - 10 = 0$ . По готовой формуле получаем ответ:  $\sqrt{6}$ .

**Задача 3.** Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(0; 1; 0)$ ,  $N(1; 1; 1)$  и  $K(0; 0; 1)$ .

**Решение.** Пусть  $ax + by + cz + d = 0$  — искомое уравнение. Подставив в него координаты точек  $M$ ,  $N$ ,  $K$ , получаем систему трех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} b + d = 0, \\ a + b + c + d = 0, \\ c + d = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $b = -d$ ,  $c = -d$ ,  $a = d$ . Значит, искомое уравнение имеет вид  $dx - dy - dz + d = 0$  или (поскольку  $a$ ,  $b$  и  $c$  одновременно не равны 0,  $d \neq 0$ )  $x - y - z + 1 = 0$ .

**Задача 4.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось  $Ox$  и точку  $M(3; 2; 4)$ .

**Решение.** Плоскость, проходящая через ось  $Ox$ , содержит, например, точки  $(1; 0; 0)$  и  $(2; 0; 0)$  — задача свелась к предыдущей. Можно, впрочем, и сразу сообразить, что уравнение плоскости, проходящей через ось  $Ox$ , имеет вид  $by + cz = 0$ .

**Задача 5.** Точки  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(-1; 3; 4)$  и  $C(1; 2; 1)$  принадлежат плоскости  $\alpha$ . При каком значении  $k$  точка  $M(k; 2; 5)$  тоже принадлежит плоскости  $\alpha$ ?



**Решение.** Находим уравнение плоскости  $ABC$  (задача 3) и подставляем в него координаты точки  $M$ . Несколько короче, пользуясь компланарностью векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  и  $\vec{AM}$ , разложить вектор  $\vec{AM}$  по векторам  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ :  $\vec{AM} = \mu \vec{AB} + \nu \vec{AC}$ ; переписав это векторное равенство в координатной форме, получим систему трех уравнений с тремя переменными  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $k$ .

**Задача 6.** Найдите угол между плоскостями  $-3y + z + 2 = 0$  и  $2y + z - 5 = 0$ .

**Решение.** Искомый угол  $\alpha$  мы найдем при помощи угла  $\beta$  между векторами, перпендикулярными к данным плоскостям. Углы  $\alpha$  и  $\beta$  могут не совпадать. По определению  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Угол же  $\beta$  между векторами по определению заключен между  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . Очевидно (рис.1),  $\alpha = \beta$  или  $\alpha = 180^\circ - \beta$ . Поэтому  $\cos \alpha = |\cos \beta|$ .

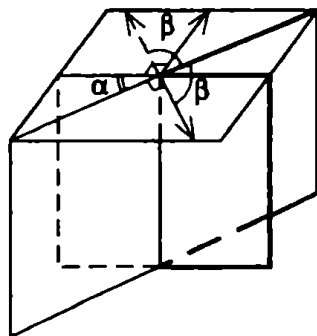


Рис.1

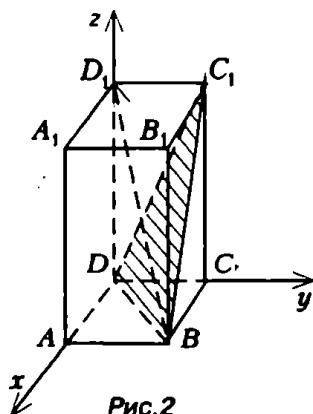


Рис.2

**Задача 7.** Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $C(3; 2; 1)$ , и плоскостью, проходящей через точки  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $D(3; 1; 2)$ .

**Решение.** Сначала находим уравнения плоскостей  $ABC$  и  $ABD$  (задача 3), затем — угол между ними (задача 5).

**Задача 8.** В правильной четырехугольной призме отношение длин бокового ребра и стороны основания равно 2. Найдите угол между диагональю  $BD_1$  призмы и плоскостью  $BC_1D$ .

**Решение.** Введем систему координат, как показано на рисунке 2, и положим  $AB = a$ . Далее последовательно находим координаты точек  $B$ ,  $C_1$  и  $D$ , уравнение плоскости  $BC_1D$  (задача 3), координаты точки  $D_1$  и вектора  $\vec{BD_1}$ .

На этот раз искомый угол  $\alpha$  мы найдем при помощи угла  $\beta$  между вектором, перпендикулярным к плоскости  $BC_1D$ , и вектором  $\vec{BD_1}$ . По определению  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Очевидно (рис.3),

$\alpha = 90^\circ - \beta$  или  $\alpha = 90^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta - 90^\circ$ . Поэтому  $\sin \alpha = |\cos \beta|$ .

Ответ:  $\arcsin \sqrt{6}/9$ .

**Задача 9. Уравнения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  суть  $2x + 3y + 4z - 8 = 0$  и  $4x + y + 3z - 6 = 0$ ,  $p = \alpha \cap \beta$ . а) Определите координаты точки пересечения прямой  $p$  с плоскостями  $xOy$  и  $yOz$ . б) Определите величину угла между прямой  $p$  и плоскостью  $xOz$ .**

**Решение.** Координаты точки  $A = p \cap xOy$  являются решением системы

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 8 = 0, \\ 4x + y + 3z - 6 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Координаты точки  $B = p \cap yOz$  — решение системы

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 8 = 0, \\ 4x + y + 3z - 6 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Теперь, если  $\alpha$  — искомый угол и  $\beta$  — угол между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{n} = (1; 0; 1)$ , то  $\sin \alpha = |\cos \beta|$ .

Ответ: а)  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 0; 2)$ . б)  $\arcsin 2/3$ .

### Упражнения

1. Точка  $P(2; -1; 1)$  служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составьте уравнение этой плоскости.

2. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку  $(2; -3; 3)$  параллельно плоскости  $xOy$ .

3. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(4; 0; 0)$  и  $B(0; 0; 4)$  и параллельной оси  $Oy$ .

4. Вычислите расстояние от плоскости  $2x + 2y - z + 15 = 0$  до сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ .

5. Даны четыре точки:  $A(1; -2; 2)$ ,  $B(1; 4; 0)$ ,  $C(-4; 1; 1)$ ,  $D(-5; -5; 3)$ . а) Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости. б) Определите величину угла между прямыми  $AC$  и  $BD$ .

6. В пространстве даны векторы  $\vec{MA} = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{MB} = (-2; 3; 5)$  и  $\vec{MC} = (3; 5; 1)$ . Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями, проходящими, соответственно, через векторы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$  и  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MC}$ .

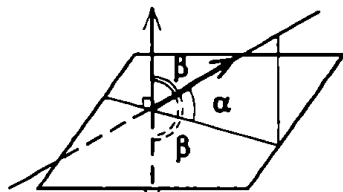


Рис.3

Н.Федин

На экзаменах часто предлагают стереометрические задачи, для решения которых самое важное — представить себе, как расположены фигуры в пространстве. Иногда пространственные соображения подсказывают идеи решения планиметрических задач. В этой статье мы и расскажем о некоторых вопросах и задачах, которые в какой-то степени должны заинтересовать старшеклассников и помочь им расширить горизонты своего пространственного воображения.

## СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

1. Нарисуем две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . На рисунке 1 дано их изображение.

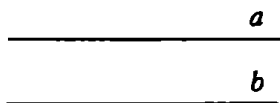


Рис. 1

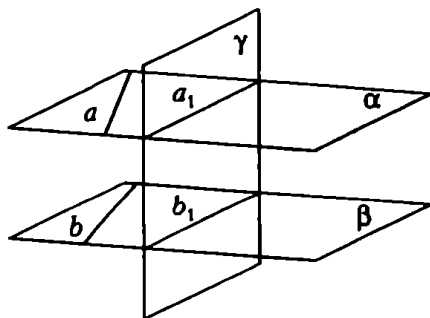


Рис. 2

Вы удивлены, что прямые изображены параллельными? Напрасно. Это верный чертеж, хотя и не наглядный. Известно, что скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  можно расположить в параллельных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы прямая  $a$  лежала в плоскости  $\alpha$ , а прямая  $b$  — в  $\beta$ , а затем спроектировать их на плоскость  $\gamma$ , перпендикулярную плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 2). В этой плоскости мы и получим изображения  $a_1$  и  $b_1$  прямых  $a$  и  $b$ .

2. Пусть даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  и точки  $A_1, A_2$  на прямой  $a$  и  $B_1, B_2$  на прямой  $b$  (рис. 3). Проведем прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ .

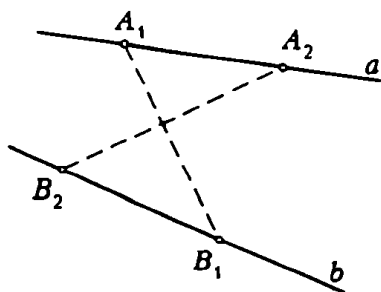


Рис.3

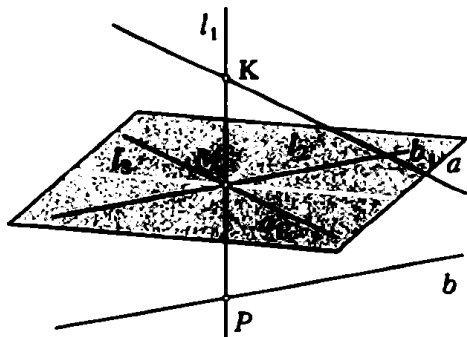


Рис.4

*Могут ли эти прямые пересекаться?*

Конечно, чертеж нас может подвести. Но если допустить, что прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  пересекаются, то получится, что четыре точки  $A_1, A_2, B_1, B_2$  лежат в одной плоскости, а следовательно, будут лежать в одной плоскости и исходные прямые, чего не может быть. Мы приходим к выводу, что прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  не могут пересекаться.

**3. Имеет ли фигура, состоящая из двух скрещивающихся прямых, центр симметрии?**

Может показаться, что центр симметрии у двух скрещивающихся прямых существует и совпадает с серединой  $M$  их общего перпендикуляра (рис.4). Однако это не так. В самом деле, если бы центр симметрии у этих двух прямых был, то прямая  $a$  при центральной симметрии перешла бы в параллельную прямую  $b$ , но  $b$  не параллельна  $a$ . Следовательно, скрещивающиеся прямые не могут иметь центра симметрии.

**4. Имеют ли две скрещивающиеся прямые ось симметрии?**

Этот вопрос значительно труднее вопроса о центре симметрии скрещивающихся прямых. Оказывается, что две скрещивающиеся прямые имеют три оси симметрии:  $l_1, l_2$  и  $l_3$ . Одна из них является общим перпендикуляром к исходным прямым  $a$  и  $b$ . Две другие взаимно перпендикулярны, пересекаются в середине  $M$  отрезка  $KP$  и являются биссектрисами смежных углов, образованных прямыми  $a_1$  и  $b_1$ , соответственно параллельными  $a$  и  $b$  (рис.4). Попробуйте доказать этот факт самостоятельно.

## РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Обычно планиметрические задачи решаются на плоскости, а стереометрические задачи связываются с изображением пространственной фигуры на плоском чертеже. Такие приемы

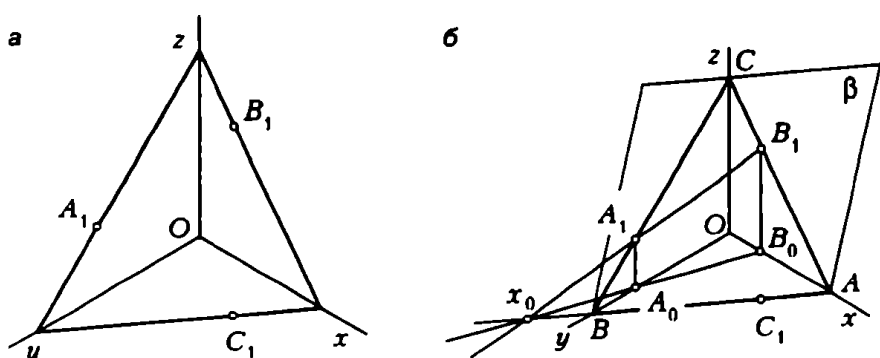


Рис.5

решения задач или доказательства теорем никого не удивляют, они являются общепринятыми. А вот решение планиметрических задач стереометрическим, пространственным, трехмерным способом — это уже необычно и любопытно. Конечно, решаются этим методом далеко не все задачи, а только задачи определенного типа.

5. На плоскости даны три луча, исходящие из одной точки (рис.5, а) и делящие плоскость на три угла, каждый из которых меньше  $180^\circ$ . В каждом из трех углов дано по одной точке:  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что эти точки не лежат на одной прямой. Требуется построить треугольник  $ABC$ , вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

Решить эту задачу планиметрическим путем трудно, однако стереометрически она решается довольно легко. Представим себе (рис.5, б), что лучи образуют в пространстве ребра трехгранного угла с вершиной в точке  $O$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  представим себе расположенными в гранях трехгранного угла. Эти точки определяют некоторую плоскость. Обозначим эту плоскость через  $\beta$ ; она пересечет грани трехгранного угла по искомым сторонам  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Осталось построить линии пересечения плоскостей граней трехгранного угла с плоскостью  $\beta$ .

Для этого спроектируем данные точки на плоскость  $xOy$  параллельно  $Oz$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  перейдут соответственно в точки  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  (точка  $C_1$  останется на месте).

Таким образом, мы свели задачу к проекционной, что в школе часто называют задачей на сечение многогранного угла плоскостью. Находим точку  $x_0$  пересечения прямой  $A_1B_1$  с плоскостью  $xOy$ , это будет точка пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $A_0B_0$ . Точки  $x_0$  и  $C_1$  лежат и в плоскости  $\beta$ , и в плоскости  $xOy$ , следовательно, секущая плоскость  $\beta$  пересечет плоскость  $xOy$  по прямой  $x_0C_1$ .

Затем найдем точки пересечения прямой  $x_0C_1$  с лучами (ребрами)  $Ox$ ,  $Oy$ , получим точки  $A$  и  $B$ . Проводя  $BA_1$  и  $AB_1$ , получим в пересечении с осью (лучом  $Oz$ ) третью точку — вершину  $C$  искомого треугольника  $ABC$ . Пространственное представление помогло нам найти идею решения планиметрической задачи.

6. На плоскости даны два треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  такие, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $S$ , а прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  пересекаются в точках  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Докажите, что точки  $x$ ,  $y$  и  $z$  лежат на одной прямой  $l$ .

Эта задача известна в геометрии под названием теоремы Дезарга\*.

Вот идея ее доказательства. Представим себе, что точка  $S$  является вершиной пирамиды с основанием  $ABC$  и секущей плоскостью  $A_1B_1C_1$  (рис.6). Тогда прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  лежат в плоскости  $ABC$ , а прямые  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$  и  $A_1C_1$  лежат в плоскости  $A_1B_1C_1$ . Поэтому  $x$ ,  $y$  и  $z$  лежат и в плоскости треугольника  $ABC$ , и в плоскости треугольника  $A_1B_1C_1$ , т.е. они расположены на линии пересечения этих плоскостей, на прямой  $l$ .

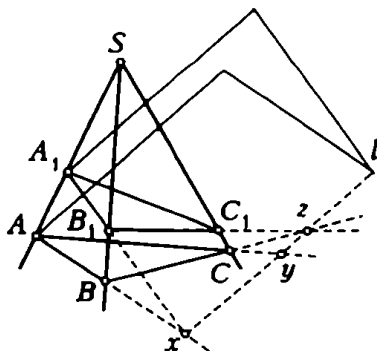


Рис.6

Строго доказательство теоремы Дезарга проведите самостоятельно.

Условие, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $S$ , использовано вот в каком месте: прямые  $AB$  и  $A_1B_1$  (и другие) не скрещиваются в пространстве, а пересекаются в точке  $x$ . В дальнейших рассуждениях участвуют только плоскости треугольников, о пирамиде можно забыть.

Интересно, справедлива ли эта теорема для четырехугольников  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , у которых прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  пересекаются в одной точке  $S$ ? Будут ли при этом условия четыре точки пересечения продолжений сторон  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CD$  и  $C_1D_1$ ,  $DA$  и  $D_1A_1$  лежать на одной прямой? Вообще говоря, это не так. Для двух четырехугольников аналогичная теорема будет верна при некоторых дополнительных условиях.

Постарайтесь самостоятельно найти эти условия.

\*Жерар Дезарг — французский математик и инженер (1593—1662).

**Указание.** Рассмотрите прямую, соединяющую точки пересечения диагоналей четырехугольников.

Интересно, что в условиях задач не фигурировали ни длины отрезков, ни величины углов. В этих задачах речь шла только о точках пересечения прямых и плоскостей, о принадлежности точек прямым. Планиметрическую фигуру мы рассматривали как проекцию некоторой пространственной фигуры на плоскость. Такой метод проекции или проектирования характерен для особой ветви геометрии, которая называется проективной геометрией.

## ПЕРЕСЕЧЕНИЕ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР

Рассмотрим несколько задач.

**7.** Дана треугольная пирамида  $ABCD$  с вершиной  $D$ . На продолжениях сторон  $CA$  и  $CB$  взяты точки  $K$  и  $P$  такие, что  $AC = 2AK$  и  $BC = 2BP$ ;  $M$  — середина ребра  $CD$ . Через точки  $K, P, M$  проведена секущая плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?

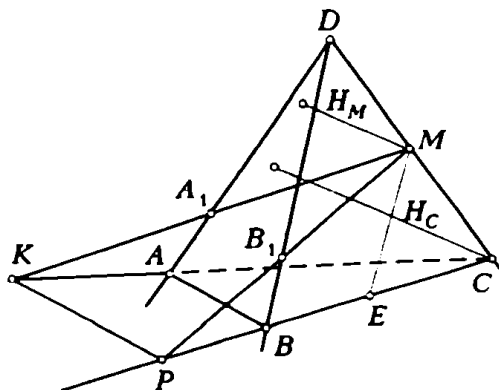


Рис.7

Через точки  $K, P, M$  проведена секущая плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?

Для решения задачи посмотрим, что представляет собой сечение пирамиды плоскостью  $KPM$ , т.е. плоскостью, определяемой тремя точками  $K, M$  и  $P$  (рис.7).

Треугольники  $ABC$  и  $KCP$  подобны, следовательно,  $KP \parallel AB$ . Тогда  $KP$  параллельна плоскости  $ABD$ ,  $KP = \frac{3}{2} AB$ . Секущая плоскость пересечет грань  $ABD$  по отрезку  $A_1B_1$ , параллельному  $KP$ , а следовательно, параллельному и  $AB$ . Проведем среднюю линию  $ME$  треугольника  $BCD$ ,  $CE = EB = BP$ ,  $ME \parallel BD$ . Замечаем, что  $BB_1$  — средняя линия треугольника  $MPE$ , откуда  $BD = 2ME = 4BB_1$ , следовательно,  $A_1B_1 = \frac{3}{4} AB$  (треугольники  $ABD$  и  $A_1B_1D$  подобны). Площади подобных фигур относятся, как квадраты сходственных сторон, поэтому  $S_{\Delta A_1B_1D} = \frac{9}{16} S_{\Delta ABD}$ . Пусть  $V$  — объем пирамиды  $ABCD$ . При вычислении объема  $V_1$  пирамиды  $A_1B_1MD$  целесообразно за ее основание принять грань  $A_1B_1D$ . Тогда высота  $H_M$  будет составлять половину высоты  $H_C$ , так как  $M$  —

середина отрезка  $CD$ . Имеем:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 B_1 D} H_M = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} S_{\Delta ABD} \frac{H_C}{2} = \frac{9}{32} \left( \frac{1}{3} S_{\Delta ABD} H_C \right) = \frac{9}{32} V.$$

Объем нижней части пирамиды  $V''$  будет составлять  $23/32$  объема пирамиды  $ABCD$ . Теперь находим отношение объемов верхней и нижней частей пирамиды:  $V' : V'' = 9 : 23$ .

8. На плоскости стола расположены четыре шара с радиусами  $R$ , касающиеся друг друга (центры шаров образуют квадрат). Затем в «ямку», образованную этими шарами, положен пятый шар с тем же радиусом. Требуется найти расстояние от верхней точки пятого шара до плоскости стола\*.

Изобразив центры шаров и обозначив их  $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5$  (рис.8), нетрудно найти искомое расстояние  $NP$  как сумму длин отрезков  $NO_5 + O_5O + OP$ , оно будет равно  $2R + O_5O$ . Отрезок  $O_5O$  — высота правильной пирамиды, у которой все ребра равны  $2R$  — расстоянию между центрами шаров.

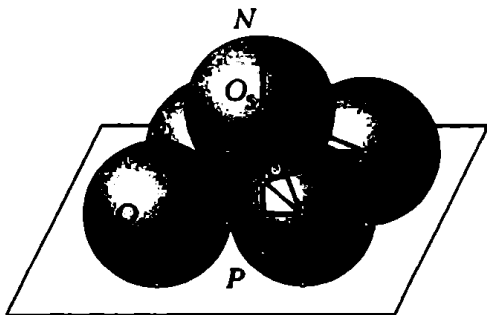


Рис.8

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить несколько задач.

### Упражнения

1. На плоскости стола расположены три шара, касающиеся друг друга и имеющие радиус  $R$ . Затем в «ямку», образованную этими шарами, положен четвертый шар с тем же радиусом. Найдите расстояние от верхней точки четвертого шара до плоскости стола\*\*.

2. Дан усеченный конус с осью  $OO_1 = h$  и радиусами основания  $r$  и  $R$ . На окружностях оснований берутся всевозможные точки  $A$  и  $B$  такие, что  $A$  и  $B$  лежат на разных окружностях и  $OO_1$  и  $AB$  — скрещивающиеся отрезки. Найдите границы изменения расстояния между  $OO_1$  и  $AB$ .

3. Вершина  $S$  правильной треугольной пирамиды  $ABCS$  перемещается по высоте  $OS$  в бесконечность, а затем по высоте приближается к плоскости основания. В каких границах будет изменяться линейный угол двугранного угла при ребре  $AS$ ?

\*Интересный вопрос по физике: какова должна быть сила трения между шариками и между шариками и столом, чтобы все это сооружение не рассыпалось?

\*\*Тот же вопрос по физике.



При проверке письменных работ поступающих в высшие учебные заведения часто обнаруживается следующее: в чистовике геометрическая задача сопровождается достаточно хорошим чертежом, а то, что изображено в черновике, чертежом можно назвать лишь условно. И приходится только удивляться, как с помощью такого «чертежа» абитуриенты умудрились все-таки решить задачу. Ведь не секрет, что хороший чертеж может оказать существенную помощь в решении геометрических задач, особенно задач по стереометрии. Конечно, научиться делать такие чертежи, какие делают художники «Кванта», вряд ли возможно для рядового школьника. Однако если при решении каждой геометрической задачи обращать внимание на качество чертежа, то в конце концов вы научитесь делать его вполне прилично. Возьмите себе за правило не приступать к решению задачи до тех пор, пока вы не сделаете хорошего чертежа. Не жалейте бумаги, делайте свой чертеж крупным, невидимые линии изображайте пунктиром, не проводите вспомогательных линий, пока не убедитесь в их необходимости. Очень часто стереометрические задачи сводятся к одной или нескольким задачам по планиметрии. Сделайте для каждой такой задачи отдельный чертеж. Шары, как правило, изображать не следует; достаточно бывает указать их центр, точки касания с прямой, плоскостью или другими шарами. Факт касания двух шаров означает, что расстояние между их центрами равно сумме радиусов, если касание внешнее, и это же расстояние равно разности радиусов, если касание внутреннее.

Перейдем к примерам.

**Задача 1.** *Внутри сферы расположены четыре шара с радиусами  $r$ . Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы. Определите радиус сферы.*

**Решение.** Пусть  $A, B, C$  и  $D$  — центры шаров с радиусами  $r$ , а  $O$  — центр сферы (рис. 1). Из того, что шары касаются попарно друг друга внешним образом, следует, что  $ABCD$  — правильный тетраэдр с ребром  $2r$ . Все шары касаются внутренним образом сферы с центром  $O$ , поэтому расстояния  $AO, BO, CO, DO$  равны между собой и равны  $R - r$ , где  $R$  — искомый радиус сферы. С другой стороны, все эти расстояния равны радиусу шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром  $2r$ . Теперь уже легко найти искомый радиус  $R$ . Сделайте это сами.

**Ответ:**  $R = r(1 + \sqrt{3/2})$ .

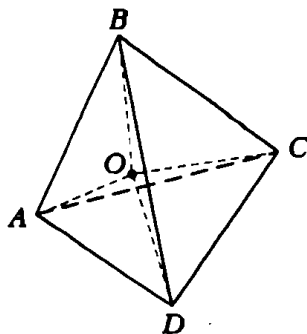


Рис. 1

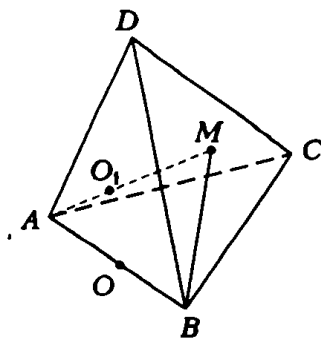


Рис. 2

**Задача 2.** Ребро правильного тетраэдра  $ABCD$  равно  $a$ . На ребре  $AB$ , как на диаметре, построена сфера. Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке  $A$  и касающегося построенной сферы.

**Решение.** Пусть  $O$  — середина  $AB$  — центр данной сферы,  $O_1$  — центр искомого шара. Легко сообразить, что  $O_1$  лежит на высоте  $AM$  тетраэдра  $ABCD$  (рис. 2).

Обозначим через  $x$  радиус шара с центром в точке  $O_1$ . Из того, что этот шар вписан в трехгранный угол  $A$ , следует, что  $AO_1 = 3x$ . В самом деле, для любого шара, вписанного в трехгранный угол  $A$ , отношение расстояния от его центра до вершины  $A$  к радиусу есть величина постоянная. Рассмотрим шар, вписанный в правильный тетраэдр  $ABCD$ ; центр его, как известно, совпадает с центром описанного шара; отношение же радиусов описанного и вписанного шаров для правильного тетраэдра легко вычисляется; оно равно 3.

Изобразим  $\triangle AMB$  на отдельном чертеже ( $\angle M$  — прямой) (рис. 3). Рассмотрим  $\triangle AO_1$ .

Имеем

$$AO_1 = 3x, \quad AO = a/2, \quad O_1O = a/2 \pm x.$$

Знак  $\leftrightarrow$  соответствует случаю внешнего касания шаров с центрами в точках  $O$  и  $O_1$ , знак  $\leftarrow \rightarrow$  — случаю касания внутреннего. (На рисунке 3 изображен случай внутреннего касания. В случае внешнего касания точка  $O_1$  должна находиться на продолжении  $AM$  за точку  $M$ .)

Из прямоугольного треугольника  $AMB$  находим  $\cos \angle O_1AO$ , а затем, написав теорему косинусов для  $\triangle OAO_1$ , находим  $x$ .

Ответ:  $\frac{a}{8}(\sqrt{6} \pm 1)$ .

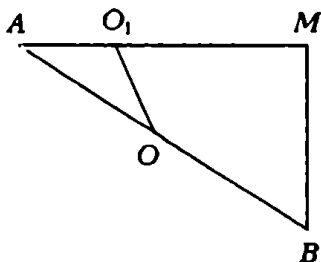


Рис.3

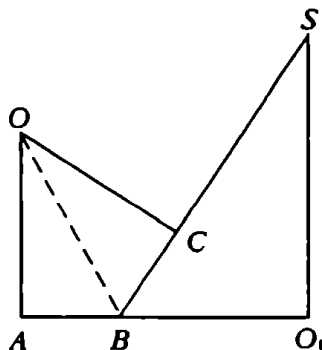


Рис.4

**Задача 3.** Три одинаковых прямых круговых конуса, радиусы оснований которых равны  $r$  и составляют  $3/4$  их высоты, расположены по одну сторону от плоскости  $P$ , а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждого двух из этих конусов касаются. Найдите радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости  $P$ , так и всех трех конусов.

**Решение.** Нам понадобятся следующие две леммы (докажите их самостоятельно):

**Лемма 1.** Если шар внешним образом касается поверхности конуса и плоскости, в которой лежит основание конуса, то ось конуса, образующая конуса, на которой расположена точка касания конуса с шаром, центр шара и точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса, находятся в плоскости, перпендикулярной к плоскости основания конуса (рис. 4). (На рисунке  $SO_1$  — ось конуса,  $SB$  — его образующая,  $O$  — центр шара,  $A$  — точка касания шара с плоскостью, в которой лежит основание конуса,  $C$  — точка касания шара с конусом.)

**Лемма 2.** Точка касания шара с плоскостью  $P$  находится в центре правильного треугольника, образованного центрами

окружностей оснований конусов (шар, конусы и плоскость  $P$  — из условия задачи).

Теперь рисунок 4 поможет нам решить задачу. Имеем

$$AO_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}, BO_1 = r, SO_1 = \frac{4}{3}r.$$

Искомый радиус  $OA$  легко найти из прямоугольного треугольника  $AOB$ , в котором известен катет  $AB$  и  $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle ABS$ , а все тригонометрические функции угла  $ABS$  легко вычисляются.

Ответ:  $2r(2\sqrt{3} - 3)/3$ .

**Задача 4.** На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности с радиусами 1, каждая из которых касается двух других. Найдите радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

**Решение.** Перечислим следующие факты, на которые мы будем опираться при решении задачи; вам следует доказать их самостоятельно:

1) если две окружности, расположенные на сфере, касаются друг друга, то центр сферы, центры этих окружностей и точка касания расположены в одной плоскости;

2) центры  $O_1, O_2, O_3$  данных окружностей с радиусами 1 образуют правильный треугольник;

3) центр искомой окружности находится на радиусе сферы, перпендикулярном плоскости  $O_1O_2O_3$ .

Для решения задачи нам понадобятся рисунки 5 и 6.

На рисунке 5  $O$  — центр сферы,  $O_1$  и  $O_2$  — центры двух окружностей с радиусами 1,  $A$  — точка их касания,  $\angle AO_1O = \angle AO_2O = 90^\circ$ ,  $OA = 2$ .

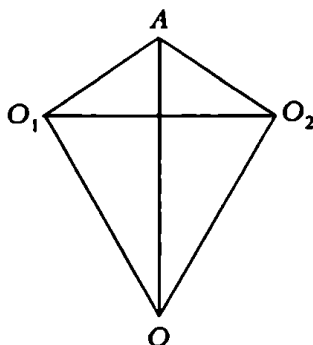


Рис. 5

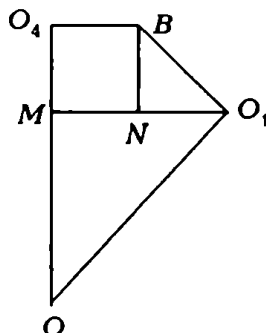


Рис. 6

Теперь легко найдем

$$OO_1 = OO_2 = O_1O_2 = \sqrt{3}.$$

На рисунке 6  $M$  — центр правильного треугольника  $O_1O_2O_3$  со стороной  $\sqrt{3}$  и, значит,  $O_1M = 1$ ,  $O_4$  — центр искомой окружности,  $B$  — точка ее касания с первой окружностью,  $BN \perp MO_1$ . Отрезок  $NO_1$  легко найти из подобия  $\triangle O_1BN$  и  $\triangle O_1MO$ , а искомый радиус  $O_4B = MN = MO_1 - NO_1$ .

Ответ:  $1 - \sqrt{2/3}$ .

Иногда бывает полезно рассмотреть какое-нибудь геометрическое тело — пирамиду, параллелепипед, призму и т.д., — не фигурирующее в условии задачи.

**Задача 5.** *Оси трех равных попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найдите радиус наименьшего шара, касающегося всех трех поверхностей, если радиус каждой из них равен  $r$ .*

**Решение.** Рассмотрим куб  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $2r$ . Мы можем считать, что ребро  $AA_1$  лежит на оси одного цилиндра, ребро  $DC$  — на оси другого и, наконец, ребро  $B_1C_1$  — на оси третьего (рис. 7).

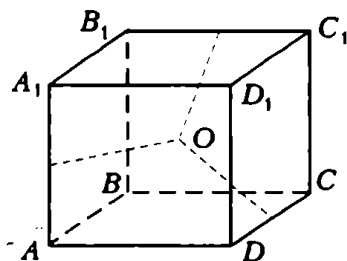


Рис. 7

Докажем, что центр искомого шара совпадает с центром  $O$  куба.

В самом деле, рассмотрим три цилиндра, концентрических данным и проходящих через точку  $O$ . Тогда  $O$  — единственная точка, лежащая внутри или на поверхности всех этих трех цилиндров, и значит, для любой

точки, отличной от  $O$ , расстояние до одной из трех прямых  $AA_1$ ,  $DC$  и  $B_1C_1$  больше, чем расстояния от  $O$  до этих прямых.

Ответ:  $r(\sqrt{2} - 1)$ .

**Задача 6.**  *$n$  равных конусов ( $n \geq 3$ ) имеют общую вершину, каждый касается двух других, и все они касаются одной плоскости. Найдите угол при вершине осевого сечения этих конусов.*

**Решение.** Рассмотрим треугольную пирамиду  $SABC$  (рис. 8), у которой в основании лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AC = CB$ ) с углом  $ACB$ , равным  $2\pi/n$ ,  $SC$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и проекция  $C$  на плоскость  $SAB$  совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABS$ . Рассмотрим теперь конус, вершина которого находится в точке  $C$ , а

окружностью основания является окружность, вписанная в  $\triangle SAB$ . Легко убедиться, что этот конус можно рассматривать в качестве искомого. В самом деле, если поставить рядом друг с другом  $n$  пирамид, равных пирамиде  $SABC$ , так чтобы у них совпадали вершины  $S$ , то конусы, вписанные в эти пирамиды, будут образовывать систему, удовлетворяющую условиям задачи.

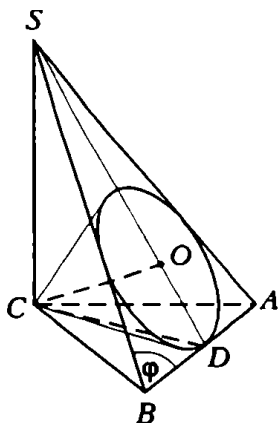


Рис. 8

Обозначим через  $l$  образующую конуса, а через  $r$  — радиус окружности его основания. Из подобия прямоугольных треугольников  $SCD$  и  $OCD$  найдем  $SD = l^2/r$ , из  $\triangle CDB$  —  $DB = l \operatorname{tg}(\pi/n)$ . С другой стороны, из  $\triangle SDB$  находим

$$SD = DB \cdot \operatorname{tg} \varphi = DB \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}},$$

где  $\varphi$  — угол  $SBD$ , т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{OD}{DB} = \frac{r}{l \operatorname{tg}(\pi/n)}.$$

Синус половины искомого угла равен отношению  $r/l$ , которое легко определяется из получившегося уравнения:

$$\frac{l^2}{r} = l \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2 \frac{r}{l \operatorname{tg}(\pi/n)}}{1 - \frac{r^2}{l^2 \operatorname{tg}^2(\pi/n)}}.$$

**Ответ:**  $2 \arcsin \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2(\pi/n)}}.$

**Задача 7.** На плоское зеркало под углом  $\alpha$  падает луч света. Зеркало поворачивается на угол  $\beta$  вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?

**Решение.** Пусть  $A$  — некоторая точка на луче,  $B$  — точка падения луча на зеркало,  $A_1$  — точка, симметричная  $A$  относительно данного зеркала, а  $A_2$  — точка, симметричная  $A$  относительно повернутого зеркала,  $D$  и  $C$  — проекции точки  $A$  на эти зеркала (рис. 9). Тогда  $BA_1$  и  $BA_2$  суть продолжения отраженных лучей и, следовательно, искомый угол равен  $\angle A_1BA_2$ .

В тетраэдре  $AA_1A_2B$  (см. рис. 9)  $D$  и  $C$  — середины ребер  $AA_1$  и  $AA_2$  соответственно; плоскость  $BDC$  (плоскость повернутого

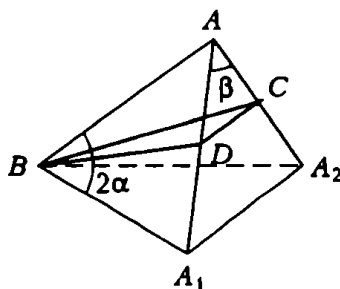


Рис.9

зеркала) перпендикулярна ребру  $AA_2$ ,  $AB = A_1B = A_2B$ ,  $\angle ABA_1 = 2\alpha$ ,  $\angle A_1AA_2 = \beta$ . Отсюда легко находим

$$A_1A_2 = 2DC = 2AD\sin\beta = 2AB\sin\alpha\sin\beta.$$

Теперь из  $\triangle A_1BA_2$  находим нужный угол.

**Ответ:**  $2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$ .

Переходя к самостоятельному решению задач, список которых приводится в конце этой заметки, просмотрите внимательно еще раз решения задач 1 – 7. На первый взгляд кажется, что во всех этих задачах необходим весьма сложный чертеж. Однако мы сумели обойтись простыми, в некоторых случаях даже чисто планиметрическими чертежами. Чтобы проиллюстрировать достаточно трудную стереометрическую задачу простым чертежом, необходимо обладать хорошо развитым пространственным воображением. Достигается это практикой и только практикой.

### Упражнения

1. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности и остальных четырех шаров. Определите объем конуса, если радиус каждого шара равен  $R$ .

2. Три шара с радиусами  $r$  лежат на нижнем основании правильной треугольной призмы, причем каждый из них касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. На этих шарах лежит четвертый шар, который касается всех боковых граней и верхнего основания призмы. Определите высоту призмы.

3. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна стороне основания. Внутри пирамиды расположены два шара: шар с радиусом  $r$  касается всех боковых граней; шар с радиусом  $2r$  касается основания и двух смежных боковых граней; оба шара касаются друг друга внешним образом. Найдите апофему этой пирамиды.

4. Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла  $2\alpha$ . Пусть  $A$  — точка касания одного шара с одной гранью угла, а  $B$  — точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок  $AB$  делится сферами?

5. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$  ( $S$  — вершина) со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $a$ . Сфера с центром в точке  $O$  проходит через точку  $A$  и касается ребер  $SB$  и  $SD$  в их серединах. Найдите объем пирамиды  $OSCD$ .

6. Правильный треугольник со стороной  $a$  лежит в плоскости  $P$ . Средними линиями он разделен на четыре треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены, как на основаниях, три правильные треугольные пирамиды высотой  $a$ . (Все три — по одну сторону от плоскости  $P$ .) Найдите радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости  $P$ , так и всех трех пирамид.

7. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды  $SABC$  наклонены к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Шар касается плоскости основания  $ABC$  в точке  $A$  и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту  $BD$  основания проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

8. Оси трех равных попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найдите радиус наибольшей цилиндрической поверхности, которая может пройти между данными цилиндрами, если радиусы данных равны  $r$ .



## НЕОЖИДАННЫЙ РАКУРС

В.Дубровский

Чертежи в стереометрии обычно стараются делать как можно более наглядными, выбирая такой ракурс, чтобы все важные точки, линии, плоскости были хорошо видны. Однако для обширной группы задач выгодней другой ракурс: такой, при котором некоторые прямые и плоскости *вырождаются*, т.е. изображаются, соответственно, точками и прямыми. О таких задачах мы и расскажем.

Идея предлагаемого приема — специальный выбор параллельной проекции. Поэтому сформулируем сначала основное свойство параллельной проекции, непосредственно вытекающее из ее свойств:

Пусть  $A', B', C', D'$  образы точек  $A, B, C, D$  при параллельной проекции на плоскость  $\pi$  вдоль прямой  $l$ . Тогда если  $\vec{AB} = k\vec{CD}$ , то и  $\vec{A'B'} = k\vec{C'D'}$  (рис. 1, а)\*.

В частности, проекции трех точек, лежащих на одной прямой, также лежат на прямой; проекция прямой  $a$  — прямая, если  $a$  не

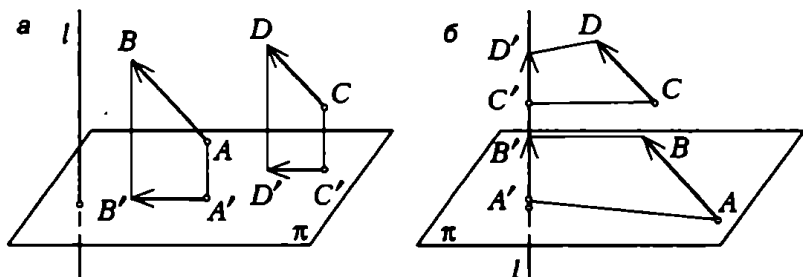


Рис. 1

параллельна  $l$ , и точка, если  $a \parallel l$ ; проекция плоскости, параллельной  $l$  — прямая.

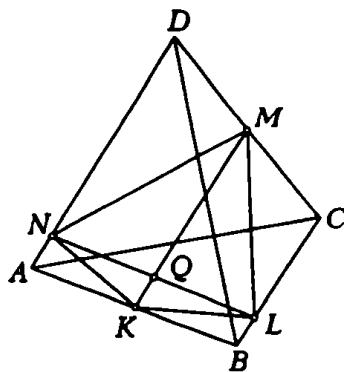
\*В дальнейшем это свойство используется так часто, что ссылаться на него при его использовании мы не будем; при оформлении письменной работы школьники (и абитуриенты) должны непосредственно ссылаться на свойства параллельной проекции.

Мы будем пользоваться также *а* параллельной проекцией на прямую  $l$  вдоль плоскости  $\pi$  ( $l$  не параллельна  $\pi$ ). По определению, образом произвольной точки  $X$  при такой проекции является точка пересечения  $X'$  прямой  $l$  с плоскостью, проходящей через  $X$  и параллельной  $\pi$ . Нетрудно доказать, что сформулированное выше основное свойство имеет место и для проекции на прямую вдоль плоскости (рис. 1,б)\*.

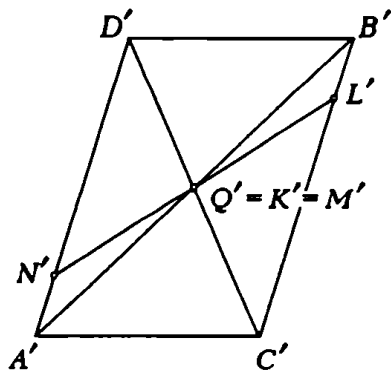
**Задача 1.** Дан тетраэдр  $ABCD$ . Через середины  $K$  и  $M$  ребер  $AB$  и  $CD$  тетраэдра проведена плоскость, пересекающая ребра  $BC$  и  $AD$  соответственно в точках  $L$  и  $N$ . Расстояние от вершины  $B$  до этой плоскости равно 2. Диагонали четырехугольника  $KLMN$  пересекаются в точке  $Q$ , причем  $KQ : QM = 0,2$ . Вычислите площадь четырехугольника  $KLMN$ , если известно, что объем тетраэдра  $BKMC$  равен 12.

**Решение** (рис. 2). Найдем сначала отношения, в которых точки  $L$  и  $Q$  делят, соответственно, отрезки  $BC$  и  $NL$ . Для этого построим параллельные проекции тетраэдра на некоторую плоскость вдоль прямой  $KM$  (рис. 2,б) и вдоль прямой  $NL$  (рис. 2,в). Эта плоскость (которую естественно отождествлять с плоскостью чертежа), конечно, должна пересекать прямую  $KM$  (соответственно, прямую  $NL$ ), но в остальном ее выбор не влияет ни на решение, ни на ответ — продумайте, почему.

\*Поскольку параллельная проекция на прямую вдоль плоскости в школе не изучается (в отличие от проекции на плоскость вдоль прямой), абитуриент, применяющий ее на экзамене, должен обосновать те ее свойства, на которые он ссылается.



б



в

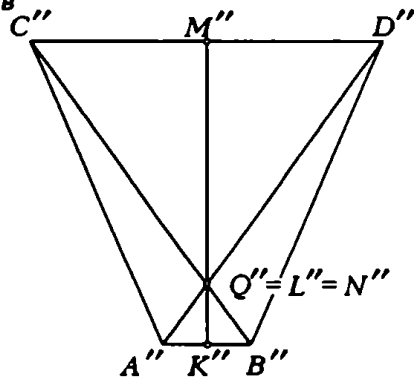


Рис.2

Например, можно считать, что мы смотрим на тетраэдр, повернув его так, что точки  $K$  и  $M$  (или  $L$  и  $N$ ) совместились.

На проекции вдоль прямой  $KM$  образы точек  $Q$ ,  $K$  и  $M$  совпадают, сечение изображается отрезком  $L'N'$ , а тетраэдр — параллелограммом  $A'C'B'D'$  с проведенными диагоналями, ведь по условию  $K$  и  $M$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Из рисунка 2,6 немедленно следует, что  $Q'$  — середина отрезка  $L'N'$  (значит,  $Q$  — середина отрезка  $NL$ ) и что точки  $L'$  и  $N'$  делят проекции ребер тетраэдра в равных отношениях:  $D'N' : N'A' = C'L' : L'B'$ . Это равенство сохраняется и при проекции вдоль  $LN$ , т.е. на рисунке 2,в:  $D''N'' : N''A'' = C''L'' : L''B''$ ;

следовательно, на этом рисунке  $A''B'' \parallel C''D''$  и поэтому  $\frac{C''L''}{L''B''} = \frac{M''Q''}{Q''K''}$ . Значит,  $\frac{CL}{LB} = \frac{MQ}{QK}$ . Но по условию  $\frac{MQ}{QK} = 5$ .

Следовательно,  $CL : LB = 5$ . Отсюда расстояние от точки  $C$  до плоскости сечения равно  $5 \cdot 2 = 10$ . Объем тетраэдра  $BKMC$  равен сумме объемов тетраэдров  $BKML$  и  $CKML$ , высоты которых, опущенные на грань  $KML$ , равны, как мы видели, 2 и 10. Таким образом,  $V_{BKMC} = 12 = \frac{1}{3} S_{\Delta KML} \cdot (2+10)$ ; следовательно, площадь треугольника  $KML$  равна 3. Но площади треугольников  $KMN$  и  $KML$  равны, так как треугольники имеют общее основание  $KM$  и равные высоты, опущенные на это основание (напомним, что  $Q$  — середина  $NL$ ), поэтому

$$S_{KLMN} = 2S_{\Delta KML} = 6.$$

В дальнейшем чтобы не перегружать формулы штрихами, мы будем одинаково обозначать изображение одной и той же точки во всех проекциях.

Для следующей задачи мы приведем два решения: одно — при помощи проекции вдоль прямой, другое — вдоль плоскости.

**Задача 2.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , где  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  боковые ребра. В каком отношении делит ребро  $B_1 C_1$  точка  $E$ , которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину  $A$  и центры граней  $A_1 B_1 C_1 D_1$  и  $B_1 C_1 C D_1$ ?

**Первое решение.** Построим проекцию куба (рис.3,а) вдоль прямой  $KL$ , где  $K$  — центр грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $L$  — центр грани  $B_1 C_1 C D_1$  (рис.3,б). Проекции этих граней изобразятся в виде параллелограммов с общей стороной  $B_1 C_1$  и общим центром  $K = L$ ; следовательно, проекции вершин  $B$  и  $A_1$ ,  $C$  и  $D_1$  также совпадут. Положение на рисунке 3,а точек  $A$  и  $D$  определяется

из условий  $\vec{AA_1} = \vec{DD_1} = \vec{BB_1}$ . Плоскость сечения проектируется в прямую  $AK$ , пересекающую отрезок  $B_1C_1$  в точке  $E$ . Обозначим через  $M$  середину отрезка  $BB_1$ , тогда (рис.3,б)  $\frac{B_1E}{B_1C_1} = \frac{B_1E}{2KM} = \frac{1}{2} \frac{B_1A}{MA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ . Отсюда  $B_1E : EC_1 = 2$ .

**Второе решение** (рис.3,в). Выберем систему координат с началом  $E$  так, чтобы оси абсцисс и ординат лежали в плоскости  $EKL$ . Тогда аппликаты точек  $E, K, L$  и  $A$  равны нулю. Воспользуемся основным свойством для проекции вдоль плоскости  $EKL$ . Из условия  $\vec{KC_1} = -\vec{KA_1}$  и  $\vec{LC_1} = -\vec{LB}$  получаем  $z_{A_1} = z_B$  и  $z_{C_1} = -z_{A_1} = -z_B$  (здесь  $z_P$  обозначает аппликату точки  $P$ ). Далее из условия  $\vec{AA_1} =$

$= \vec{BB_1}$  и равенства  $z_{A_1} = z_B$  получаем  $z_{B_1} = 2z_{A_1}$ . Таким образом, точки  $C_1, E, B_1$  на отрезке  $C_1B_1$  имеют аппликаты  $z_{C_1}, 0, -2z_{C_1}$  соответственно. Вновь применяя основное свойство, получаем  $B_1E : EC_1 = 2$ .

**Задача 3.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  с боковыми ребрами  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . Пусть точка  $P$  делит ось  $OO_1$  призмы в отношении 5 : 1. Через точку  $P$  и середины ребер  $AB$  и  $A_1C_1$  проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

**Решение.** Пусть  $K$  — середина  $AB$ ,  $N$  — середина  $A_1C_1$ . Спроектируем призму на некоторую прямую  $l$  вдоль плоскости сечения  $PKN$ . Рассмотрим на прямой  $l$  координаты, приняв за начало отсчета проекцию плоскости сечения  $PKN$ . Рассмотрим на прямой  $l$  координаты, приняв за начало отсчета проекцию плоскости  $PKN$  (рис.4,б). Определим координаты проекций всех вершин призмы. Выбор масштаба в нашей воле; пусть,

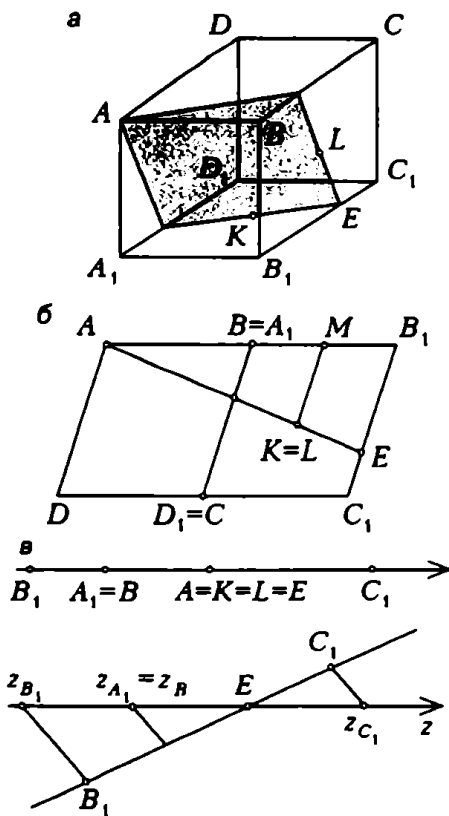


Рис.3



соответственно, то

$$\frac{\vec{AK}}{KB} \cdot \frac{\vec{BL}}{LC} \cdot \frac{\vec{CM}}{MA} = -1.*$$

**Доказательство** (рис.5). Спроектируем треугольник параллельно прямой  $l$  на какую-либо пересекающую ее прямую. Тогда

$$\frac{\vec{AK}}{KB} \cdot \frac{\vec{BL}}{LC} \cdot \frac{\vec{CM}}{MA} = \frac{\vec{A'P}}{PB'} \cdot \frac{\vec{B'P}}{PC'} \cdot \frac{\vec{C'P}}{PA'} = (-1)^3 = -1.$$

(Отметим, что верна и обратная теорема, ее можно доказать от противного.)

Разберем теперь задачу, в которой важны не только отношения длин параллельных отрезков, как это было выше, но и сами эти длины, а также углы между отрезками. В отличие от предыдущих задач, здесь играют роль и направление проекции, и плоскость, на которую мы проектируем.

**Задача 4.** Сторона основания  $ABCD$  правильной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  имеет длину  $2a$ , боковое ребро — длину  $a$ . Рассматриваются отрезки с концами на диагонали  $AD_1$  грани и диагонали  $DB_1$  призмы, параллельные плоскости  $AA_1 B_1 B$ .

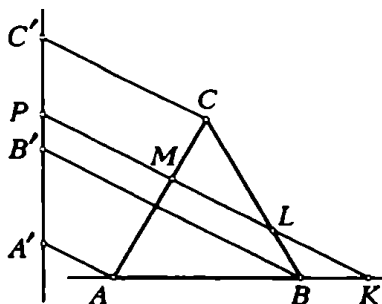
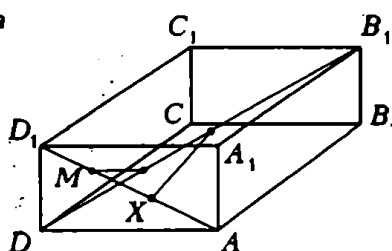


Рис.5

1) Один из этих отрезков проведен через такую точку  $M$  диагонали  $AD_1$ , что  $AM : AD_1 = 2 : 3$ . Найдите его длину.

а



б

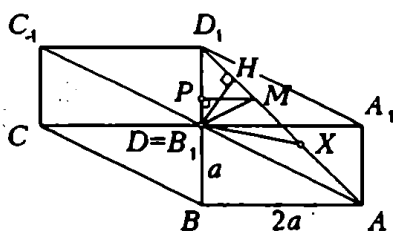


Рис.6

\*Через  $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$  мы обозначаем такое число  $k$ , что  $\vec{a} = k\vec{b}$ , если оно существует, т.е. если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны и  $|\vec{b}| \neq 0$ .

2) Найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

**Решение** (рис.6). Спроектируем призму вдоль диагонали  $B_1D$  на плоскость грани  $ABB_1A_1$ . Легко видеть, что получится чертеж, изображенный на рисунке 6,б. Ясно, что любой отрезок, параллельный плоскости  $ABB_1A_1$ , спроектируется в отрезок той же длины (!). Поэтому рассматриваемые отрезки будут равны своим проекциям  $DX$ , где  $X \in AD_1$ . Очевидно, кратчайший из них есть перпендикуляр  $DH$ , опущенный из точки  $D$  на  $AD_1$ . Треугольник  $DHD_1$ , как и  $\triangle ABD_1$ , — прямоугольный и равнобедренный, поэтому  $DH = \frac{\sqrt{2}}{2} DD_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a$  (это ответ на второй вопрос). Длину отрезка  $DM$  можно найти из прямоугольного треугольника  $MPD$ , в котором  $DP = \frac{1}{3} DD_1 = \frac{a}{3}$ ,  $MP = \frac{1}{3} AB = \frac{2a}{3}$ . Таким образом,

$$DM = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

В заключение приведем короткое и поучительное доказательство одной из красивейших теорем стереометрии, основанное на методе проектирования.

**Задача 5.** Докажите, что если все грани тетраэдра равновелики (имеют одинаковые площади), то они попарно равны.\*

**Решение.** Пусть  $MN$  — общий перпендикуляр к ребрам  $AB$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$  с равновеликими гранями (рис.7,а). Легко понять, что ортогональная проекция тетраэдра вдоль прямой  $AB$  является треугольником  $ADC$  (рис.7,б), в котором сторона  $AD$  равна высоте  $DD_1$  грани  $ABD$ , а сторона  $AC$  — высоте  $CC_1$  грани  $ABC$ , причем отрезок  $MN$  проектируется в высоту  $AN$  треугольника  $ADC$ . Поскольку

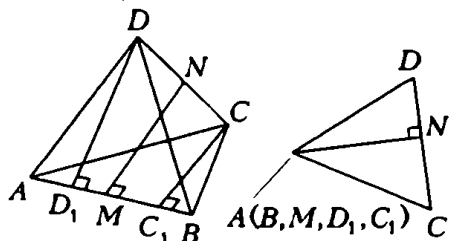


Рис.7

треугольники  $ABC$  и  $ABD$  имеют одинаковые площади и общее основание  $AB$ , их высоты, опущенные на это основание, равны, значит, на рисунке 7,б  $AD = AC$ ; а значит, точка  $N$  (основание высоты равнобедренного треугольника) делит отрезок  $CD$  пополам. Пользуясь основным свойством проекции и повторяя это рассуждение применительно к остальным ребрам тетраэдра,

\*Тетраэдры, удовлетворяющие условию задачи, называются *равногранными*. Заметим, что они вовсе не обязаны быть правильными, хотя многие их свойства очень напоминают свойства правильных тетраэдров.

закключаем, что общие перпендикуляры всех пар скрещивающихся ребер тетраэдра  $ABCD$  проходят через середины соответствующих ребер и, стало быть являются осями симметрии тетраэдра. Например, при осевой симметрии с осью  $MN$  (рис. 7, а) вершина  $A$  перейдет в  $B$ ,  $B$  — в  $A$ ,  $C$  — в  $D$ ,  $D$  — в  $C$ , поэтому грань  $ABC$  равна грани  $ABD$ , а грань  $ACD$  — грани  $BCD$ . Точно так же доказывается, что  $\triangle ABD = \triangle ACD$ .

### Упражнения

1. Даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Найдите множество точек  $X$ , делящих в постоянном отношении отрезки  $AB$  ( $AX : XB = k$ ), где а) точка  $A$  пробегает прямую  $a$ ,  $B$  пробегает прямую  $b$ ; б) то же самое, но с условием, что прямая  $AB$  остается все время параллельной данной плоскости  $\alpha$ .

2. Дана замкнутая неплоская четырехзвенная ломаная  $ABCD$  («пространственный четырехугольник»). Докажите, что точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , взятые на ее звеньях  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда  $\frac{\vec{AK}}{KB} \cdot \frac{\vec{BL}}{LC} \cdot \frac{\vec{CM}}{MD} \cdot \frac{\vec{DN}}{NA} = 1$ .

3. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SAB CDE F$  с вершиной  $S$ . На ребрах  $SA$  и  $SC$  взяты точки  $K$  и  $L$  так, что  $SK : KA = 3$ ,  $SL : LC = 1/3$ , точка  $M$  — середина а) ребра  $SF$ , б) ребра  $SE$ . Определите, какие ребра пирамиды пересекаются плоскостью  $KLM$  и в каком отношении они ею делятся.

4. Площадь трапеции  $ABCD$  равна  $S$ , отношение длин оснований  $AD : BC = 3 : 1$ . Отрезок  $MK$  расположен так, что он параллелен стороне  $CD$  и пересекает сторону  $AB$ , а отрезок  $AM$  параллелен отрезку  $BK$ . Определите площадь треугольника  $BKC$ , если  $AM : BK = 3 : 2$ ,  $MK : CD = 1 : 3$  (найдите все решения).

5. На диагоналях  $AB_1$  и  $CA_1$  боковых граней треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  расположены, соответственно, точки  $D$  и  $E$  так, что  $DE \parallel BC_1$ . Определите отношение  $DE : BC_1$ .

6. Сторона основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  имеет длину  $a$ , боковое ребро — длину  $2a$ . Рассматриваются отрезки с концами на диагонали  $BD$  основания и боковом ребре  $SC$ , параллельные  $SAD$ . Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

7. Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Докажите, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$ .

8. Объем тетраэдра  $ABCD$  равен 5. Через середины ребер  $AD$  и  $BC$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $CD$  в точке  $M$ . При этом отношение длины отрезка  $DM$  к длине отрезка  $MC$  равно  $\frac{2}{3}$ . Вычислите площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины  $A$  равно 1.

9. Дан куб  $AB C D A_1 B_1 C_1 D_1$ , длина ребра которого равна 1. На ребрах  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $DD_1$  взяты соответственно точки  $K$ ,  $P$  и  $M$  — так, что  $AK : A_1K = 1 : 3$ ,  $BP : B_1P = 3 : 1$ ,  $DM : D_1M = 3 : 1$ . Найдите объем



пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $P$  и  $M$ , а вершина расположена в точке  $A_1$ .

10. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площади граней  $ABB_1 A_1$  и  $BCC_1 B_1$  равны, соответственно,  $S_1$  и  $S_2$ , а площади «диагональных сечений»  $ACC_1 A_1$  и  $BDD_1 B_1$  —  $s_1$  и  $s_2$ . Покажите, что  $s_1^2 + s_2^2 = 2(S_1^2 + S_2^2)$ . Выразите двугранный угол при ребре  $AA_1$  через эти площади.

11. На прямой  $l$  в пространстве последовательно расположены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  такие, что  $AB = 10$ ,  $BC = 22$ . Найдите расстояние между прямыми  $l$  и  $m$ , если расстояния от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  до прямой  $m$  равны 12, 13 и 20 соответственно.

Эта заметка посвящена некоторым особенностям применения векторов к решению геометрических задач.

Применение векторов основано на том, что различные утверждения о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей могут быть сформулированы на «векторном языке», в частности с помощью понятий коллинеарности и компланарности. Это позволяет свести геометрическую задачу к векторному равенству. В свою очередь векторное равенство можно свести (в частности, на основе теоремы единственности разложения) к алгебраическому равенству или системе алгебраических равенств.

**Задача 1.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Плоскость пересекает боковые ребра  $SA, SB, SC$  и  $SD$  пирамиды соответственно в точках  $M, N, P$  и  $Q$  так, что  $SM : SA = a$ ,  $SN : SB = b$ ,  $SP : SC = c$ ,  $SQ : SD = d$ . Докажите, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$ .

**Решение.** Отрезки  $NM, NP$  и  $NQ$  (рис.1) лежат в одной плоскости. Согласно определению компланарных векторов, векторы  $\vec{NM}, \vec{NP}$  и  $\vec{NQ}$  компланарны. Векторы  $\vec{NM}$  и  $\vec{NP}$ , очевидно, не коллинеарны, поэтому по теореме о разложении компланарных векторов существуют числа  $x$  и  $y$  такие, что

$$\vec{NQ} = x\vec{NM} + y\vec{NP}. \quad (1)$$

Разложим эти векторы по трем некомпланарным векторам  $\vec{SA}, \vec{SB}$  и  $\vec{SC}$ . Имеем  $\vec{SM} = a\vec{SA}$ ,  $\vec{SN} = b\vec{SB}$ ,  $\vec{SP} = c\vec{SC}$ ,  $\vec{SQ} = d\vec{SD}$ , откуда

$$\vec{NM} = \vec{SM} - \vec{SN} = a\vec{SA} - b\vec{SB}, \quad (2)$$

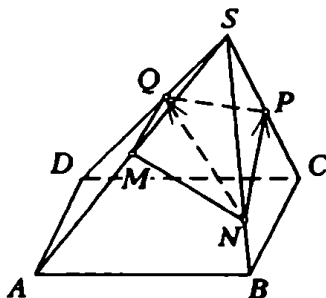


Рис.1

$$\vec{NP} = \vec{SP} - \vec{SN} = c\vec{SC} - b\vec{SB}, \quad (3)$$

$$\vec{NQ} = \vec{SQ} - \vec{SN} = d\vec{SD} - b\vec{SB}. \quad (4)$$

Поскольку  $\vec{SD} = \vec{SA} + \vec{AD}$ , а  $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{SC} - \vec{SB}$ , из (4) следует, что

$$\vec{NQ} = d\vec{SA} - (d+b)\vec{SB} + d\vec{SC}. \quad (5)$$

Подставляя (2), (3), (5) в (1), получаем

$$\vec{NQ} = d\vec{SA} - (d+b)\vec{SB} + d\vec{SC} = ax\vec{SA} - b(x+y)\vec{SB} + cy\vec{SC}. \quad (6)$$

В силу единственности разложения векторное равенство (6) равносильно системе

$$\begin{cases} d = ax, \\ d + b = b(x + y), \\ d = cy. \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда  $x + y = \frac{d}{a} + \frac{d}{c} = \frac{d+b}{b}$ , или  $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$ .

В рассмотренном примере векторное равенство (6) было сведено к системе (7). Следует помнить, что равенство для векторов в пространстве равносильно именно *системе* трех алгебраических равенств. Поэтому если хотя бы одно из равенств этой системы неверно при любых значениях переменных, то и векторное равенство неверно, а исходная геометрическая задача решений не имеет. Следующий простой пример подтверждает это.

**Задача 2.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед, точка  $M$  — середина ребра  $BB_1$ , точка  $N$  принадлежит прямой  $BD_1$ . При каком отношении  $BN : BD_1$  прямые  $AN$  и  $C_1 M$  параллельны?

**Решение.** Векторы  $\vec{BN}$  и  $\vec{BD_1}$  (рис.2) коллинеарны, поэтому при некотором  $\lambda$

$$\vec{BN} = \lambda \vec{BD_1}. \quad (8)$$

Положим  $\vec{BA} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ ,  $\vec{BB_1} = \vec{c}$ ; все остальные векторы будем раскладывать по этим трем некопланарным векторам. Поскольку

$$\vec{BD_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{BN} = \lambda(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

$$\text{Далее, } \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = -\vec{a} + \lambda(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (\lambda - 1)\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c}.$$

$$\text{Кроме того, } \vec{MC_1} = \vec{MB_1} + \vec{B_1C_1} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}.$$

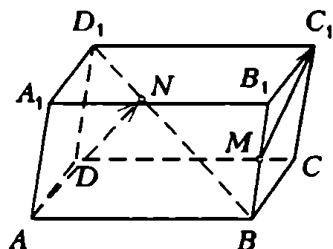


Рис.2

лельны, то векторы  $\vec{AN}$  и  $\vec{MC}_1$  коллинеарны и, значит, при некотором  $x$  верно равенство  $\vec{AN} = x\vec{MC}_1$ , откуда

$$(\lambda - 1)\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c} = x\vec{b} + \frac{x}{2}\vec{c}. \quad (9)$$

Из (9) сразу следует, что  $\lambda - 1 = 0$ ,  $\lambda = 1$ . Теперь из (8) получаем  $BN : BD_1 = 1$ .

Казалось бы, задача решена. Но не тут-то было. Действительно, равенство (9) равносильно системе

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 0, \\ \lambda = x, \\ \lambda = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта система относительно  $\lambda$  и  $x$  решений не имеет. Из первых двух уравнений следует, что  $x = \lambda = 1$ , а подстановка в третье уравнение приводит к неверному равенству  $1 = \frac{1}{2}$ . Таким образом, ни при каком положении точки  $N$  прямые  $AN$  и  $MC_1$  не параллельны.

Этот результат для данной задачи, конечно, очевиден. Достаточно, вместо того чтобы записывать соотношения между векторами, немного подумать. В самом деле, прямая  $MC_1$  пересекает плоскость  $AD_1C_1B$  и, следовательно, не может быть параллельна прямой  $AN$ , лежащей в этой плоскости.

Выше уже использовалась теорема о разложении компланарных векторов: *если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, то любой вектор  $\vec{c}$ , компланарный с векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , можно представить единственным образом в виде*

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (10)$$

В ряде случаев векторное решение геометрических задач приводит к такому вопросу: компланарны ли векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , если имеет место (10)? Соответствующей теоремы в школьном учебнике нет, но легко понять, что ответ на этот вопрос — утвердительный:

(\*) *если при некоторых  $x$  и  $y$  верно (10), то векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарны.*

Докажем это для случая, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны и  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ . От некоторой точки  $O$  отложим векторы  $\vec{OA} = x\vec{a}$  и  $\vec{OB} = y\vec{b}$  (рис.3). Их суммой является вектор  $\vec{OC}$ , где  $OC$  —

диагональ параллелограмма  $OACB$ . Таким образом, лучи, задающие направления векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , параллельны соответственно прямым  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , лежащим в плоскости  $OAB$ . Значит, векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. В исключенных выше случаях доказательство еще проще, и мы оставляем его читателю.

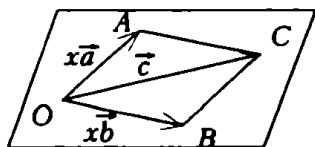


Рис. 3

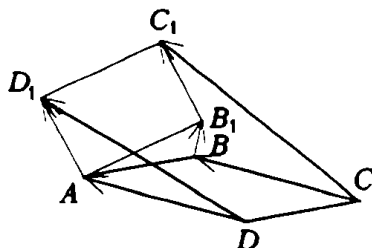


Рис. 4

**Задача 3.** Точка  $A$  — общая вершина параллелограммов  $ABCD$  и  $AB_1C_1D_1$ . Докажите компланарность векторов  $\vec{BB}_1$ ,  $\vec{CC}_1$ ,  $\vec{DD}_1$ .

**Решение.** Имеем  $\vec{CC}_1 = \vec{CB} + \vec{BB}_1 + \vec{B}_1C_1$  (рис. 4) и, так как  $\vec{CB} = \vec{DA}$  и  $\vec{B}_1C_1 = \vec{AD}_1$ , получаем  $\vec{CC}_1 = \vec{BB}_1 + (\vec{DA} + \vec{AD}_1)$ . Но  $\vec{DA} + \vec{AD}_1 = \vec{DD}_1$ , поэтому  $\vec{CC}_1 = \vec{BB}_1 + \vec{DD}_1$ . Отсюда следует по (\*), что векторы  $\vec{CC}_1$ ,  $\vec{BB}_1$  и  $\vec{DD}_1$  компланарны.

**Задача 4.** Даны три единичных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  такие, что угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  равен  $\pi/3$ , между  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  также  $\pi/3$ , а между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  —  $\pi/2$ . Компланарны ли эти векторы?

**Решение.** Предлагаем сначала найти ошибку в следующем рассуждении:

«Докажем, что  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. Будем искать числа  $x$  и  $y$ , для которых

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (11)$$

Для этого умножим обе части (11) скалярно на вектор  $\vec{a}$ . Получим  $\vec{c} \cdot \vec{a} = x\vec{a} \cdot \vec{a} + y\vec{b} \cdot \vec{a}$ , откуда  $x = \frac{1}{2}$ . Умножив обе части (11) на  $\vec{b}$ , получим  $\vec{c} \cdot \vec{b} = x\vec{a} \cdot \vec{b} + y\vec{b} \cdot \vec{b}$ , откуда  $y = 1/2$ . Значит,

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad (12)$$

т.е. по (\*) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарны».

То, что это рассуждение ошибочно, установить легко. Достаточно попытаться отложить в одной плоскости от некоторой точки векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  с заданными углами между ними. Сразу

станет ясно, что это невозможно. Значит, векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  не компланарны.

Для того чтобы понять, где была допущена ошибка, вернемся к началу рассуждения. Там было высказано намерение найти такие числа  $x$  и  $y$ , при которых равенство (11) верно. Но это намерение не было осуществлено. Действительно, последующие выкладки доказывают только то, что из (11) следует (12), и не более. Ни существование чисел  $x$  и  $y$ , для которых верно (11), ни справедливость равенства (12) не доказаны. И значит, вывод «по (\*) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  компланарны» не обоснован.

Ошибка здесь состоит в том, что из проведенных рассуждений делается вывод, не соответствующий доказанному утверждению.

Приведем теперь векторное решение задачи 4.

Докажем от противного, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  не компланарны. Предположим, что существуют такие числа  $x$  и  $y$ , что равенство (11) верно. Тогда, как и ранее, получим, что верно и (12). Умножив (12) скалярно на  $\vec{c}$ , получим, что верно равенство  $1 = 1/4 + 1/4$ , т.е.  $1 = 1/2$ . Это противоречие показывает, что (11) неверно ни при каких  $x$  и  $y$ , т.е. векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  не компланарны!

Рассмотрим еще пример того, как неполный перевод условия геометрической задачи на «векторный язык» может привести к ошибке.

**Задача 5.** При какой длине ребра  $AD$  в тетраэдре  $ABCD$   $\angle ABC = \pi/2$ , угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  равен  $\angle BCD = \arccos \frac{5}{7}$ ,  $AB = BC = CD = a$ ?

**«Решение».** Поскольку  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ , мы получаем  $\vec{AD}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 + \vec{CD}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{CD} + 2\vec{BC} \cdot \vec{CD}$ . Здесь  $\vec{AB}^2 = \vec{BC}^2 = \vec{CD}^2 = a^2$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{CD} = a^2 \cos(\pi - \angle BCD) = -\frac{5}{7}a^2$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = a^2 \cos \varphi$ , а так как возможны два случая:  $\varphi = \arccos \frac{5}{7}$  или  $\varphi = \pi - \arccos \frac{5}{7}$ , получаем либо  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \frac{5}{7}a^2$ , либо  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -\frac{5}{7}a^2$ . Отсюда следует, что либо  $\vec{AD}^2 = 3a^2$ , либо  $\vec{AD}^2 = \frac{a^2}{7}$ . Значит,  $|\vec{AD}| = \sqrt{3}a$ , или  $|\vec{AD}| = a/\sqrt{7}$ .

На первый взгляд в этом решении не было возможности ошибиться. Тем не менее ошибка в нем есть. Дело в том, что

поставленная геометрическая задача равносильна задаче о решении векторной системы:

$$\begin{cases} |\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = a, \\ \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \pm \frac{5}{7} a^2, \\ \vec{BC} \cdot \vec{CD} = -\frac{5}{7} a^2, \\ \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}. \end{cases} \quad (13)$$

Это система с четырьмя неизвестными векторами  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$  и  $\vec{AD}$ , и геометрическая формулировка задачи 5 может быть теперь заменена на алгебраическую (векторную) формулировку: чему равна длина вектора  $\vec{AD}$ , если векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$  и  $\vec{AD}$  удовлетворяют системе (13)?

Теперь ясно, что указанная постановка вопроса требует либо нахождения решений системы (13), либо доказательства их существования.

В проведенном «решении» было взято последнее уравнение и после возведения в квадрат преобразовано с помощью других уравнений.

Сама же система решена не была. Иначе говоря, было доказано, что если система (13) имеет решение, то  $AD = a\sqrt{3}$ , или  $AD = a/\sqrt{7}$ .

Читатель без труда поймет, что здесь допущена по существу та же ошибка, что и в «решении» задачи 4: сделанный вывод не соответствует тому, что в действительности было доказано. Мы докажем, что система (13) не имеет решений. Приведем сначала

геометрическое доказательство.

Построим прямоугольный треугольник  $ABC$  (рис.5):  $\angle ABC = \pi/2$ ,  $AB = BC = a$ . Через точку  $C$  проведем прямую  $A'B' \parallel AB$ . Пусть прямая  $CD$  образует с прямыми  $BC$  и  $A'B'$  (или, что то же, с  $AB$ ) равные углы  $\alpha$ . Тогда легко заключить, что ортогональная проекция пря-

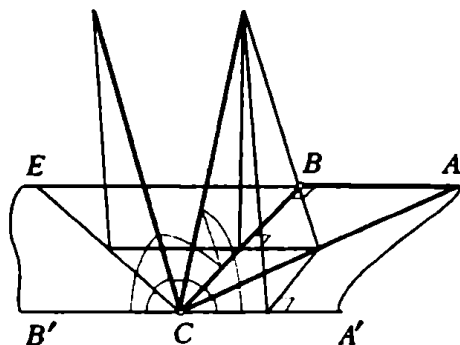


Рис.5

мой  $CD$  на плоскость  $ABC$  лежит либо на биссектрисе  $CA$  угла  $BCA'$ , либо на биссектрисе  $CE$  угла  $BCB'$ . Отсюда следует, что в первом случае  $\angle BCD > \angle BCA$ , а во втором случае  $\angle BCD > \angle BCE$ . Так как  $\angle BCA = \angle BCE = \pi/4$ , получаем  $\alpha > \pi/4$ . Величина  $\alpha = \arccos \frac{5}{7}$  этому условию не удовлетворяет, и, значит, ни при какой длине ребра  $AD$  требуемые соотношения не выполняются. Это и есть ответ к задаче 5.

Векторное исследование системы (13) можно провести, например, так. Пусть вектор  $\vec{h}$  перпендикулярен векторам  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$  и  $|\vec{h}| = a$  (такой вектор в пространстве существует). Векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{h}$  не компланарны, поэтому при некоторых  $x, y, z$

$$\vec{CD} = x\vec{AB} + y\vec{BC} + z\vec{h}. \quad (14)$$

Умножив обе части (14) скалярно на  $\vec{AB}$ , получим, что  $x = \pm 5/7$ , а умножив (14) на  $\vec{BC}$ , найдем  $y = -5/7$ . Тогда  $|\vec{CD}|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)a^2 = (50/49 + z^2)a^2 > a^2$ , а это противоречит условию  $|\vec{CD}| = a$ .

Значит, система (13) решений не имеет, и мы получаем тот же ответ, что и ранее.

Приложенные к этой заметке задачи можно решать и с помощью векторов и чисто геометрически.

### Упражнения

1. Даны точки  $A, B, C$ , не лежащие на одной прямой, и точки  $D$  и  $O$ ,  $O \neq D$ . Докажите, что для того, чтобы точка  $D$  принадлежала плоскости  $ABC$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ , где  $x + y + z = 1$ .

2. Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . На ребрах  $AB, AS$  и  $SC$  расположены соответственно точки  $M, N$  и  $P$  так, что  $BM : AB = AN : AS = SP : SC = 2 : 3$ . Через середину  $Q$  ребра  $BC$  проведена прямая, параллельная плоскости  $MNP$  и пересекающая прямую  $SD$  в точке  $R$ . Найдите отношение  $DR : DS$ .

3. Все ребра правильной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину  $a$ . Прямая, перпендикулярная плоскости  $BA_1C_1$ , пересекает прямые  $BC_1$  и  $AB_1$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Найдите  $MN$ .

4. Даны три прямые, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через данную точку и составляющих с данными прямыми равные углы?

5. В тетраэдре  $ABCD$ :  $AB = BC = CD$ ,  $\angle ABC = \alpha$ , угол между  $AB$  и  $CD$  равен  $\angle BCD = \beta$ . Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BC$ . При каких  $\alpha$  и  $\beta$  задача а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения?



Решению многих геометрических задач присущ характер искусственности, что дало основание немецкому философу прошлого века Артуру Шопенгауэру бросить геометрии упрек в использовании «доказательств-мышеловок». Действительно, решение геометрических задач содержит мало шаблонов и часто производит впечатление фокуса. Тем более важно знать тот небольшой арсенал «стандартных» приемов, которые все-таки используются при решении этих задач. В этой статье рассказывается об одном таком приеме.

## «МЕТОД КАСТРЮЛЬКИ»

Начнем с небольшой притчи. Андрею объяснили, как сварить яйцо: «Сними с гвоздя кастрюльку, налей туда воды, положи яйцо, зажги газ, поставь кастрюльку на газовую плиту и сними через 5 минут после того как закипит вода». Андрюша так и сделал, все хорошо получилось. Но как-то, проснувшись утром, Андрей увидел, что вода в кастрюльку уже налита и газ горит. Подумав, он погасил газ, вылил воду и повесил кастрюльку на гвоздик, а затем сделал так, как его учили.

Несмотря на кажущуюся несуразность такого поведения, метод возвращения к исходным данным задачи, которую мы умеем решать, является иногда наиболее рациональным. Назовем его «методом кастрюльки».

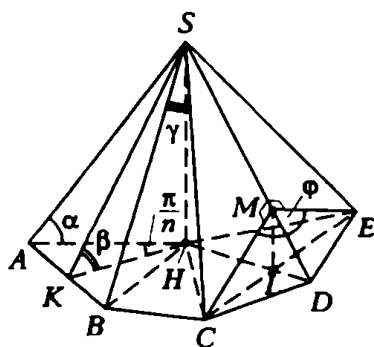


Рис. 1

## СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ УГЛАМИ В ПИРАМИДЕ

На рисунке 1 изображена часть правильной  $n$ -угольной пирами-

ды  $SABCD \dots$ ,  $SH$  — высота,  $SK$  — апофема. Введем следующие обозначения:  $\alpha$  — угол между боковым ребром и плоскостью основания;  $\beta$  — угол между боковой гранью и плоскостью основания;  $\gamma$  — угол между смежными боковыми ребрами;  $\varphi$  — угол между смежными боковыми гранями.

Если в правильной пирамиде известен один из этих углов, то можно найти остальные три. Шесть соотношений приведены в таблице. Докажем некоторые из них.

Углы	Соотношения	Область изменения углов	Связи между углами
$\alpha; \varphi$	$\sin \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \quad (1)$	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\gamma < \pi - 2\alpha$
$\alpha; \gamma$	$\cos \alpha = \sin \frac{\gamma}{2} / \sin \frac{\pi}{n} \quad (2)$	$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$	
$\alpha; \beta$	$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \frac{\pi}{n} \quad (3)$	$0 < \gamma < \frac{2\pi}{n}$	$\alpha < \beta$
$\beta; \gamma$	$\cos \beta = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \quad (4)$	$\pi - \frac{2\pi}{n} < \varphi < \pi$	$\varphi > \pi - 2\beta$
$\beta; \varphi$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-\cos \varphi - \cos \frac{2\pi}{n}}} \quad (5)$		
$\gamma; \varphi$	$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{-\cos \varphi - \cos \frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}} \quad (6)$		

(1) ( $\alpha; \varphi$ ). Рассматривая треугольники  $LMC$  и  $LMD$ , получаем  $\operatorname{tg}(\varphi/2) = CL/LM$ ,  $\sin \alpha = LM/LD$ . Значит,  $\operatorname{tg}(\varphi/2) \sin \alpha = CL/LD = \operatorname{tg} \angle CDL = \operatorname{tg}(\pi/2 - \pi/n) = \operatorname{ctg}(\pi/n)$ .

(2) ( $\alpha; \gamma$ ). Рассматривая треугольники  $AHS$  и  $AKS$ , получаем  $\cos \alpha = AH/AS$ ,  $\sin(\gamma/2) = AK/AS$ . Значит,

$$\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \alpha} = \frac{AK}{AH} = \sin \angle AHK = \sin \frac{\pi}{n}.$$

(3) ( $\alpha; \beta$ ). Рассматривая треугольники  $AHS$  и  $SHK$ , получаем  $\operatorname{tg} \alpha = SH/AH$ ,  $\operatorname{tg} \beta = SH/KH$ . Значит,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{KH}{AH} = \cos \angle AHK = \cos \frac{\pi}{n}.$$

Отметим некоторые следствия из этих формул.

Из (1) следует, что  $\operatorname{ctg}(\varphi/2) = \sin \alpha \operatorname{ctg}(\pi/2 - \pi/n)$ . Но  $\sin \alpha < 1$ , значит,  $\varphi/2 > \pi/2 - \pi/n$  или  $\varphi > \pi - 2\pi/n$ .

Из (2) следует, что  $\sin(\gamma/2) = \cos \alpha \sin(\pi/n)$ . Но  $\cos \alpha < 1$ , значит,  $0 < \gamma/2 < \pi/n$  или  $0 < \gamma < 2\pi/n$ . Из этой же формулы вытекает, что  $\sin \frac{\gamma}{2} / \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin(\pi/n) < 1$ , т.е.  $\gamma/2 < \pi/2 - \alpha$  или  $\gamma < \pi - 2\alpha$ .

Из (3) следует, что  $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = \cos(\pi/n) < 1$ , откуда  $0 < \alpha < \beta$  (что, вообще говоря, очевидно).

Как следствия формул (1), (2), (3) можно найти соотношения между  $\gamma$  и  $\varphi$ ,  $\beta$  и  $\varphi$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ . Формулы (4) – (6) докажете самостоятельно.

Рекомендуем читателю также вывести формулы (1) – (6) для правильной треугольной и четырехугольной пирамид, а затем проверить полученные результаты, подставляя в общие формулы значения  $n = 3$  и  $n = 4$ . Это упражнение тем более полезно, что важно понять методику вывода, а не запоминать окончательные результаты. Умение быстро и четко выводить соотношения между углами в правильной пирамиде является ключом к решению многих задач. В основе решения этих задач как раз и лежит «метод кастрюльки», ниже на ряде задач мы покажем, как он работает. Но прежде чем переходить к задачам, введем ряд дополнительных обозначений для правильной пирамиды:  $a$  – сторона основания,  $h$  – высота пирамиды,  $V$  – объем пирамиды,  $S$  – площадь боковой поверхности,  $S_{\text{осн}}$  – площадь основания,  $R$  – радиус описанного шара,  $r$  – радиус вписанного шара.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ПИРАМИДЫ

**Задача 1.** Найдите  $V$ , зная  $a$  и  $\alpha$ .

**Решение.** Имеем  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ ,  $S_{\text{осн}} = 2n S_{\Delta AKH} = 2n \cdot \frac{1}{2} AK \cdot KH = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ ,  $h = AH \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2 \sin(\pi/n)} \operatorname{tg} \alpha$ , откуда

$$V = \frac{na^3}{24 \sin \frac{\pi}{n}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

**Задача 2.** Найдите  $V$ , зная  $a$  и  $\beta$ .

**Решение.** Мы уже умеем находить  $V$ , зная  $a$  и  $\alpha$ . Применим «метод кастрюльки»: по формуле (3) перейдем от угла  $\beta$  к углу  $\alpha$  («повесим кастрюльку на гвоздик»), а затем воспользуемся решением задачи 1. Тогда сразу получим ответ:

$$V = \frac{na^3}{24} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

**Задача 3.** Найдите  $V$ , зная  $a$  и  $\gamma$ .

**Решение.** Воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущей задаче. Из формулы (2) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\cos \gamma - \cos \frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Подставляя это выражение для  $\operatorname{tg} \alpha$  в формулу (7), получим

$$V = \frac{na^3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\cos \gamma - \cos \frac{2\pi}{n}}}{24\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

**Задача 4.** Найдите  $V$ , зная  $a$  и  $\varphi$ .

**Решение.** Из формул (3) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\pi}{n}}{\sqrt{-\cos \varphi - \cos \frac{2\pi}{n}}}.$$

Воспользовавшись формулой (7), получаем

$$V = \frac{\sqrt{2}na^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{24\sqrt{-\cos \varphi - \cos \frac{2\pi}{n}}}.$$

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПИРАМИДЫ

Наиболее простые случаи, когда известны  $a$  и  $\beta$ ,  $a$  и  $\gamma$ . С рассмотрения этих случаев мы и начнем.

**Задача 5.** Найдите  $S$ , зная  $a$  и  $\beta$ .

**Решение.** Воспользовавшись известным соотношением  $S = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta}$ , а также тем, что  $S_{\text{осн}} = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$  (см. задачу 1), получим

$$S = \frac{na^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{4 \cos \beta}. \quad (8)$$

**Задача 6.** Найдите  $S$ , зная  $a$  и  $\gamma$ .

**Решение.** «Методом кастрюльки» задача решается несложно: воспользовавшись формулами (4) и (8), получим

$$S = \frac{na^2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{4}.$$

Но, пожалуй, еще проще решить задачу непосредственно:

$$S = n \cdot S_{\Delta ASB} = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot SK = n \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{na^2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{4}.$$

**Задача 7. Найдите  $S$ , зная  $a$  и  $\alpha$ .**

**Решение.** Из формулы (3) следует соотношение  $\cos \beta = \cos(\pi/n) / \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2(\pi/n)}$  (проверьте это!). Следовательно,

$$S = \frac{na^2 \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \frac{\pi}{n}}}{4 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

**Задача 8. Найдите  $S$ , зная  $a$  и  $\varphi$ .**

**Решение.** Из формулы (5) следует, что

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{-\cos \varphi - \cos \frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{n}}$$

(проверьте!). Воспользовавшись формулой (8), получим

$$S = \frac{\sqrt{2} na^2 \cos \frac{\pi}{n}}{4 \sqrt{-\cos \varphi - \cos \frac{2\pi}{n}}}.$$

## ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА ОПИСАННОГО ШАРА

**Задача 9. Найдите  $R$ , зная  $a$  и  $\alpha$ .**

**Решение.** Как известно, около правильной пирамиды всегда можно описать шар, центр его  $O$  лежит в точке пересечения высоты  $SH$  пирамиды с перпендикуляром  $FO$  к боковому ребру, проведенным через середину  $F$  ребра  $AS$  (см. рис. 2). Тогда  $\angle SOF = \angle SAH = \alpha$ . Имеем  $AS = AH / \cos \alpha = a / \left(2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right)$ ;  $R = OS = FS / \sin \alpha = AS / (2 \sin \alpha)$ ;

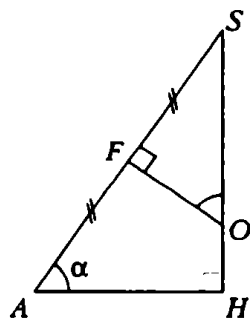


Рис.2

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n} \sin 2\alpha}. \quad (9)$$

**Задача 10. Найдите  $R$ , зная  $a$  и  $\beta$ .**

**Решение.** Из формулы (3) следует, что

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

Воспользовавшись формулой (9), получим

$$R = \frac{a\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{tg}\beta}.$$

**Задача 11.** Найдите  $R$ , зная  $a$  и  $\gamma$ .

**Решение.** Из формулы (2) следует, что

$$\sin\alpha = \sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)} - \left(\sqrt{2}\sin(\pi/n)\right) \text{ (проверьте!)}, \text{ а } \sin 2\alpha = \\ = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\gamma/2)\sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)}/\sin^2(\pi/n). \text{ Значит,}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{2}a\sin\frac{\pi}{n}}{4\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma - \cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

Формулу

$$R = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\Phi}{2}\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{4\sqrt{-\cos\Phi - \cos\frac{2\pi}{n}}},$$

выражающую  $R$  через  $a$  и  $\Phi$ , докажите самостоятельно.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА ВПИСАННОГО ШАРА

Как известно, в правильную пирамиду всегда можно вписать шар, его центр  $O$  лежит в точке пересечения высоты  $SH$  пирамиды с биссектрисой угла  $SKH$  (рис.3). Поэтому проще всего вычисляется радиус вписанного шара в случае, когда задан угол  $\beta$ ; с этого случая мы и начнем.

**Задача 12.** Найдите  $r$ , зная  $a$  и  $\beta$ .

**Решение.** Имеем  $r = OH = KH \cdot \operatorname{tg}(\beta/2)$ ;

$$r = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \quad (10)$$

**Задача 13.** Найдите  $r$ , зная  $a$  и  $\alpha$ .

**Решение.** Из формулы (3) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n} + \operatorname{tg}^2\alpha - \cos\frac{\pi}{n}}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

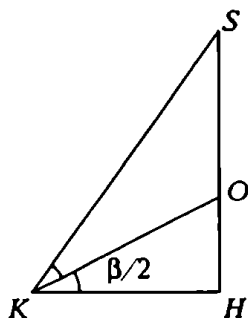


Рис.3

Из формулы (10) теперь получаем

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \left( \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{n} + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \cos \frac{\pi}{n} \right)}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

**Задача 14.** Найдите  $r$ , зная  $a$  и  $\gamma$ .

**Решение.** Из формул (4), (10) получаем

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \sqrt{\sin \left( \frac{\pi}{n} - \frac{\gamma}{2} \right) / \sin \left( \frac{\pi}{n} + \frac{\gamma}{2} \right)}.$$

Выражение  $r$  через  $a$  и  $\varphi$  найдите самостоятельно.

### Упражнения

1. Найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды равен  $\alpha$ .

2. Двугранные углы при боковых ребрах правильной 4-угольной пирамиды равны  $\alpha$ . Найдите двугранные углы при ребрах основания.

3. Высота правильной треугольной пирамиды равна  $h$ , а двугранный угол при боковом ребре равен  $2\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

4. Высота правильной треугольной пирамиды равна  $h$ , а расстояние от основания высоты до бокового ребра равно  $a$ . Определите двугранный угол между боковыми гранями пирамиды.

5. Каждый из равных углов боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равен  $\varphi$ . Расстояние от середины высоты до бокового ребра равно  $l$ . Найдите высоту пирамиды.

6. Высота правильной 4-угольной пирамиды равна  $h$ , а плоский угол между смежными боковыми гранями равен  $\varphi$ . Найдите площадь боковой поверхности.

7. Сторона основания правильной 4-угольной пирамиды, описанной около шара с радиусом  $R$ , равна  $a$ . Найдите полную поверхность пирамиды.

8. Двугранный угол при боковом ребре правильной 4-угольной пирамиды равен  $\alpha$ , радиус вписанного шара  $R$ . Найдите полную поверхность пирамиды.

9. В шар с радиусом  $R$  вписана правильная 4-угольная пирамида, у которой плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

10. Найдите объем пирамиды  $SABC$ , если высота наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ ,  $\triangle ABC$  — равносторонний, в него вписана окружность радиусом  $r$ , причем  $SC = OC$  и  $SO \perp BA$ .

Что можно сказать о высоте произвольной пирамиды? Довольно мало. Разве только повторить, по существу, *определение*: высота пирамиды проходит через вершину пирамиды и перпендикулярна ее основанию.

Однако, если про пирамиду известны некоторые дополнительные сведения, то положение высоты можно охарактеризовать подробнее. Так, всем хорошо известен тот факт, что в *правильной* пирамиде высота проходит через центр лежащего в основании правильного многоугольника. Опыт приемных экзаменов показывает, что абитуриенты обычно твердо знают положение высоты пирамиды, у которой все боковые ребра равны, но испытывают большие затруднения, если нужно определить положение высоты пирамиды, у которой, например, равны между собой только два смежных боковых ребра.

В настоящей статье мы проследим, какие особенности пирамиды позволяют получить дополнительную информацию о том, как проходит высота пирамиды. В приводимых ниже утверждениях устанавливается связь между свойствами пирамиды и положением ее высоты. Эти утверждения не следует, конечно, заучивать. Но их полезно осознать и научиться «видеть», решая ту или иную задачу о пирамидах.

**Утверждение 1.** *Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высота пирамиды проходит в плоскости этой грани, а основание высоты лежит на той стороне основания (или на ее продолжении), по которой эта грань пересекается с плоскостью основания.*

В самом деле, если боковая грань  $ASB$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды (рис.1), то, согласно теореме о перпендикуляре, опущенном на одну из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющем общую точку с другой из этих плоскостей, высота  $SO$  пирамиды принадлежит плоскости боко-



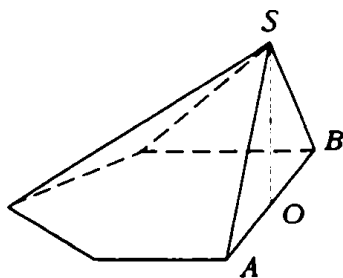


Рис. 1

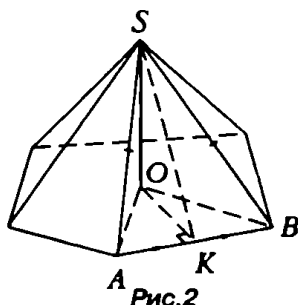


Рис. 2

вой грани  $ASB$ . При этом основание  $O$  высоты пирамиды находится на стороне  $AB$  основания (или на ее продолжении). Другими словами, высотой пирамиды является высота треугольника  $ASB$ .

**Утверждение 2.** Если два смежных боковых ребра пирамиды равны, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, проведенном через середину той стороны основания, из концов которой исходят эти боковые ребра.

Действительно, пусть  $SO$  — высота пирамиды (рис. 2); тогда  $OA$  и  $OB$  — проекции ребер  $SA$  и  $SB$  на плоскость основания. Если  $SA = SB$ , то (по известному свойству проекций равных наклонных)  $OA = OB$ , т.е. точка  $O$  (лежащая в плоскости основания) равноудалена от концов стороны  $AB$  основания. Следовательно, основание  $O$  высоты  $SO$  пирамиды лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости основания пирамиды) через середину стороны  $AB$ .

**Утверждение 3.** Если две смежные боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного теми сторонами основания, через которые проходят эти боковые грани.

Пусть равны двугранные углы, образуемые с плоскостью основания боковыми гранями  $ASB$  и  $BSC$  (рис. 3). Если  $SO$  — высота пирамиды, а  $SMO$  и  $SKO$  — линейные углы этих двугранных углов, то прямоугольные треугольники  $SOM$  и  $SOK$  равны (ибо  $SO$  — общий катет и  $\angle SMO = \angle SKO$ ); поэтому  $OM = OK$ . Но тогда равны прямоугольные треугольники  $OMB$  и  $OKB$ , а потому  $\angle OBA = \angle OBC$ . Следовательно,  $BO$  — биссектриса угла  $ABC$ .

**Утверждение 4.** Если боковое ребро пирамиды образует равные углы с двумя примыкающими к нему сторонами основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного этими сторонами основания.

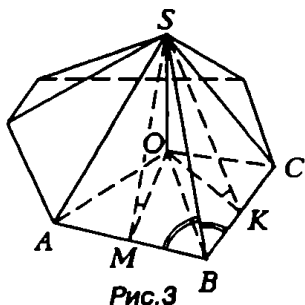


Рис.3

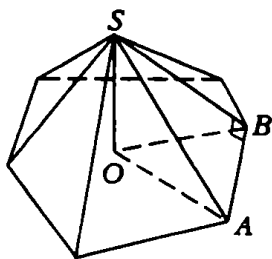


Рис.4

Пусть  $\angle SBA = \angle SBC$  (рис.3). Проведем высоты  $SM$  и  $SK$  боковых граней  $ASB$  и  $BSC$ , прямоугольные треугольники  $SMB$  и  $SKB$  равны. Отсюда вытекает, что  $SM = SK$ , а потому и  $OM = OK$ . Но тогда равны прямоугольные треугольники  $OMB$  и  $OKB$ , вследствие чего  $\angle OBA = \angle OBC$ .

**Утверждение 5.** Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно пересекающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, восставленном (в плоскости основания пирамиды) к этой стороне из точки ее пересечения с этим боковым ребром.

Действительно, пусть боковое ребро  $SB$  пирамиды перпендикулярно стороне  $AB$  основания (рис.4). Опустим высоту  $SO$  пирамиды и проведем прямую через точки  $O$  и  $B$ . По теореме о трех перпендикулярах заключаем, что  $OB \perp AB$ , т.е. основание  $O$  высоты пирамиды в самом деле лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости основания) к стороне основания  $AB$  через вершину основания  $B$ .

**Утверждение 6.** Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, опущенном на эту сторону из точки пересечения этого бокового ребра с плоскостью основания.

В самом деле, если боковое ребро  $SA$  перпендикулярно стороне  $BC$  основания пирамиды (рис.5), то, проведя высоту  $SO$  пирамиды и прямую через точки  $A$  и  $O$ , по теореме о трех перпендикулярах заключаем, что  $OA \perp BC$ .

Особенно важным является следующий частный случай утверждения 6: если боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся

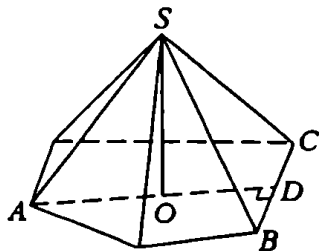


Рис.5

ся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на той высоте лежащего в основании пирамиды треугольника, которая опущена на эту сторону.

Таковы шесть особенностей пирамиды, каждая из которых оказывает свое специфическое влияние на положение ее высоты. Полезно отметить, что если пирамида обладает какими-либо двумя из этих особенностей, то положение высоты пирамиды определяется точно, т.е. можно однозначно указать точку, являющуюся основанием высоты пирамиды. Вот примеры.

1) Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно плоскости основания, то это боковое ребро и служит высотой пирамиды.

2) Если все боковые ребра пирамиды равны между собой, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, описанной около лежащего в основании пирамиды многоугольника.

3) Если все боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, вписанной в лежащий в основании пирамиды многоугольник.

Мы рекомендуем читателям самостоятельно доказать эти утверждения. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых задач.

**Задача 1.** Найдите объем пирамиды  $ASBC$ , если

$$SA = BC = 8, AB = SB = SC = 17, AC = 15.$$

**Решение.** Заметим, что  $17^2 = 15^2 + 8^2$ ; отсюда, применяя теорему, обратную теореме Пифагора, к треугольникам  $ABC$  и  $ASC$ , можно заключить, что

$$\angle ACB = \angle SAC = 90^\circ.$$

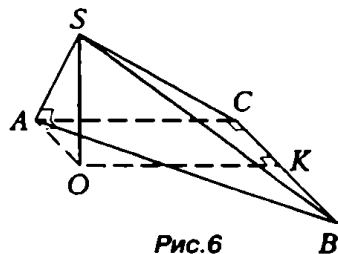


Рис. 6

Так как  $AC \perp AS$  (рис. 6), то основание  $O$  высоты пирамиды  $SO$  лежит на перпендикуляре, восставленном (в плоскости треугольника  $ABC$ ) в точке  $A$  к стороне  $AC$  (см. утверждение 5). Далее, так как  $SB = SC$ , то точка  $O$

лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости треугольника  $ABC$ ) через середину  $K$  отрезка  $BC$  (см. утверждение 2).

Следовательно,  $ACKO$  — прямоугольник. Теперь из прямоугольного треугольника  $SOA$  находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = 4\sqrt{3},$$

после чего легко определяется объем пирамиды:  $V_{ASBC} = 80\sqrt{3}$ .

**Решение.** Так как  $AS \perp BC$  (рис.7), то основание  $O$  высоты пирамиды  $SO$  лежит на высоте  $AN$  треугольника  $ABC$  (см. утверждение 6). Поскольку грани  $ASB$  и  $BSC$  одинаково наклонены к плоскости  $ABC$ , то, согласно утверждению 3, точка  $O$  одновременно лежит на биссектрисе  $BK$  угла  $ABC$ .

Следовательно, основанием  $O$  высоты пирамиды является точка пересечения высоты  $AN$  и биссектрисы  $BK$  треугольника  $ABC$ .

 $AN = 12, BN = 9.$ 
$$\frac{ON}{AO} = \frac{BN}{AB}, \quad \frac{x}{12-x} = \frac{9}{15},$$

**Задача 3.** В треугольной пирамиде  $SABC$  боковые ребра  $SB$  и  $SC$  равны между собой, а углы наклона боковых граней  $ASB$



**Решение.** Основание  $O$  высоты  $SO$  будет точкой пересечения перпендикуляра, восстановленного к стороне  $BC$  в ее середине, и биссектрисы  $AO$  угла  $BAC$  (см. утверждения 2 и 3). Поскольку  $AB \neq BC$ , эти прямые пересекаются в единственной точке, являющейся серединой дуги  $BC$  окружности, описанной вокруг

треугольника  $BAC$ . Далее находим:  $S_{\triangle ABC} = 84$  (по формуле Герона) и  $R_{\triangle ABC} = abc/4S = 65/8$ . Отсюда  $OK = R - \sqrt{R^2 - KC^2} = 4$ ;  $OC^2 = OK^2 + KC^2 = 65$ ,  $\sin \angle OAC = \sin \angle OCK = OK/OC = 4/\sqrt{65}$ ,  $\cos \angle OAC = 7/\sqrt{65}$ , и по теореме косинусов из  $\triangle AOC$  находим  $AO$ :  $AO = 2\sqrt{65}$  (легко показать, что надо брать больший корень получающегося квадратного уравнения). Теперь  $OS = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 8$ ,  $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot 8 = 224$ .

**Задача 4.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной  $a$  и углом при вершине  $\alpha$ .

Боковое ребро, исходящее из вершины угла  $\alpha$ , образует с плоскостью основания также угол  $\alpha$ . Определите объем пирамиды, если ее скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

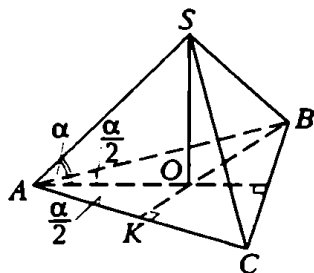


Рис.9

**Решение.** Вершина  $S$  пирамиды проектируется на плоскость основания в точку пересечения высот треугольника  $ABC$  (см. утверждение 6). Легко найти площадь треугольника  $ABC$  (рис. 9):

$S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$ . Далее, из  $\triangle ABK$  нахо-

дим:  $AK = a \cos \alpha$ , из  $\triangle AOK$ :  $AO = AK / \cos \frac{\alpha}{2} = a \cos \alpha / \cos \frac{\alpha}{2}$  и из  $\triangle AOS$ :  $OS = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$ , откуда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} a^3 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

### Упражнения

1. Сформулируйте утверждения, обратные утверждениям 1 – 6. Справедливы ли эти обратные утверждения?

2. В треугольной пирамиде высота, проведенная из вершины, попадает в точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании. Покажите, что тем же свойством обладают и все высоты пирамиды, опущенные из вершин основания на боковые грани.

3. В треугольной пирамиде  $SABC$  высота, опущенная из вершины  $S$ , проходит через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ . Кроме того известно, что  $SB = b$ ,  $SC = c$ ,  $\angle BSC = 90^\circ$ . Найдите отношение площадей граней  $ASB$  и  $ASC$ .

4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной  $a$ . Одна из граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной  $b$ , причем  $b \neq a$ . Найдите площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом.

5. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

6. В основании треугольной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной  $\sqrt{11}$ . Определите объем призмы, если ее боковое ребро равно 6, а одна из вершин верхнего основания удалена от противоположных вершин нижнего основания на 5.

Решая стереометрические задачи, важно уметь правильно определять взаимное расположение элементов возникающих в них фигур. Многие ошибки, допускаемые при решении этих задач, связаны с изображением высоты пирамиды (или призмы). Неверно расположив основание высоты относительно основания пирамиды (или призмы), поступающий вследствие этого неправильно определяет угол наклона бокового ребра к плоскости основания, ошибается при построении линейного угла двугранного угла и т.д.

Цель предлагаемых ниже задач и примеров — научить вас решать стереометрические задачи, избегая подобных ошибок. Для этого в начале статьи мы предлагаем три задачи со списком возможных ответов, из которых нужно выбрать правильный. Разумеется, здесь нельзя ограничиться угадыванием правильного ответа: его нужно обосновать. Разобравшись с этими задачами, вы легко поймете решения следующих за ними примеров, взятых из практики вступительных экзаменов.

**Задача 1.** *Какая точка плоскости ABC является основанием высоты пирамиды SABC, если:*

- а) боковые ребра равны;
- б) боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания;
- в) боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы;
- г) плоские углы при вершине S прямые;
- д) две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны;
- е) боковые ребра равны между собой и  $\angle ASB = \angle ASC = 60^\circ$ ,  $\angle BSC = 90^\circ$ ;
- ж)  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC \perp BS$ ;
- з)  $\vec{SO} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})$ ?

**Возможные ответы:**

- 1) точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ ;
- 2) точка пересечения его высот;
- 3) центр окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ ;
- 4) центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ;
- 5) центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , или одной из вневписанных\*;
- 6) середина отрезка  $BC$ ;
- 7) точка прямой  $BC$ .

Для решения задачи часто бывает существенно установить, принадлежит ли основание высоты пирамиде или находится вне ее.

**Задача 2.** В пирамиде  $SABC$  углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны между собой. При каком достаточном условии основание высоты  $SO$  пирамиды принадлежит треугольнику  $ABC$ ?

**Возможные ответы:**

- 1)  $\triangle ABC$  — равнобедренный;
- 2)  $\triangle ABC$  — равносторонний;
- 3)  $\triangle ABC$  — прямоугольный или остроугольный;
- 4)  $\triangle ABC$  — тупоугольный;
- 5) в каждом из этих случаев.

**Задача 3.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ,  $BC < AD$ ). Боковые ребра пирамиды равны между собой. При каком достаточном условии основание высоты  $SO$  пирамиды лежит вне трапеции  $ABCD$ ?

**Возможные ответы:**

- 1) если  $\angle ABD \leq 90^\circ$ ;
- 2) если  $\angle ABD > 90^\circ$ ;
- 3) если угол между векторами  $\vec{BD}$ ,  $\vec{CA}$  не меньше  $90^\circ$ ;
- 4) если угол между векторами  $\vec{BA}$ ,  $\vec{CD}$  больше  $90^\circ$ ;
- 5) ни при каком.

Перейдем теперь к разбору двух примеров, характерных для вступительных экзаменов.

**Задача 4.** Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину  $l$ . Два плоских угла при вершине пирамиды равны  $\alpha$ , а третий —  $\beta$ . Найдите объем пирамиды.

**Решение.** Пусть  $SABC$  — данная пирамида,  $\angle ASB = \beta$ ,  $\angle ASC = \angle BSC = \alpha$ . Из условия задачи следует, что треугольники  $ASC$  и  $BSC$  равны, значит,  $AC = BC$ , основание  $O$  высоты

---

\*Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других сторон.



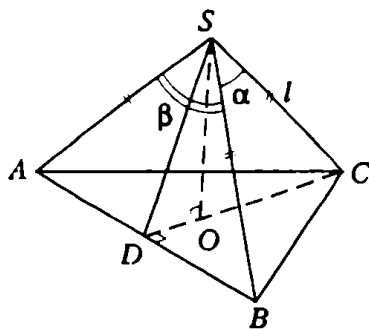


Рис. 1

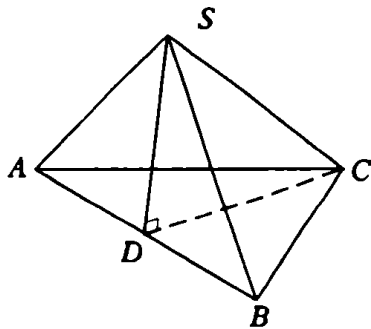


Рис. 2

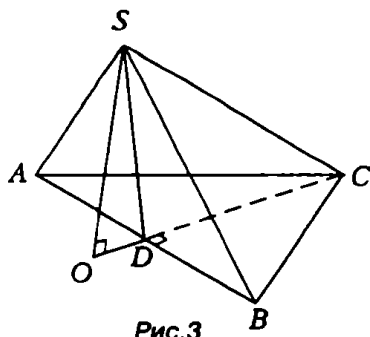


Рис. 3

$SO$  находится в центре окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$  (задача 1, а). Возможны три случая (см. задачу 2):

а)  $\angle ACB < 90^\circ$  — основание высоты расположено внутри  $\triangle ABC$  (рис. 1);

б)  $\angle ACB = 90^\circ$  — основанием высоты служит середина  $AB$  (рис. 2);

в)  $\angle ACB > 90^\circ$  — основание высоты лежит вне треугольника  $ABC$  (рис. 3). Обозначим через  $D$  середину отрезка  $AB$ .

Случай а). Исходя из условия, находим

$$AB = 2l \sin \frac{\beta}{2}; \quad SD = l \cos \frac{\beta}{2}; \quad AC = BC = 2l \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$CD = \sqrt{4l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - l^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} = l \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Положим  $OD = x$ . Из треугольника  $SOD$

$$SO^2 = l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - x^2;$$

из треугольника  $CSO$

$$SO^2 = l^2 - (CD - x)^2 = l^2 - l^2 + 2l^2 \cos \alpha - l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - x^2 + 2xl \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Отсюда

$$l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - x^2 = 2l^2 \cos \alpha - l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - x^2 + 2xl \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \frac{\beta}{2}};$$

$$x = l \frac{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha^2 \frac{\beta}{2}}};$$

$$h = SO = \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - l^2 \frac{(\cos^2 \beta/2 - \cos \alpha)^2}{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \beta/2}} =$$

$$= l \frac{\sqrt{\cos^2 \beta/2 - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \beta/2}}.$$

Значит,

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} l^3 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

**Замечание.** Поскольку  $\angle ASB < \angle ASC + \angle BSC$ , выполняется неравенство  $\beta < 2\alpha$  и подкоренное выражение положительно. Впрочем, в задачах подобного рода исследование области определения выражения, полученного в ответе, не требуется.

*Случай б).* Этот случай возможен тогда и только тогда, когда

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Действительно, если  $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD = AD = l \sin \frac{\beta}{2}$ ;  $CD = AC \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} l \sin \frac{\alpha}{2}$  (рис.2).

Отсюда  $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ . Наоборот, если  $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ , то

$$CD = l \sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \frac{\beta}{2}} = l \sqrt{2 - 2 \cos \alpha + \sin^2 \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{2} l \sqrt{1 - \cos \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} l \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} l \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому  $\cos \angle ACD = CD/AC = \sqrt{2}/2$ . Отсюда  $\angle ACD = 45^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . Если  $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$ , то  $h = SD = l \cos \frac{\beta}{2}$  (рис.2),

$$V = \frac{l^3}{3} \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad V = \frac{l^3}{6} \sin \beta \sin \frac{\beta}{2}.$$

**Случай в).** Положим  $x = OD$  (рис.3). Как в случае а), находим:

$$x = l \frac{\cos \alpha - \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \frac{\beta}{2}}}; \quad h = SO = l \frac{\sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha - \cos^2 \frac{\beta}{2}}};$$

$$V = \frac{1}{3} l^3 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \alpha}.$$

Мы видим, что ответы в случаях а) и в) совпадают, хотя получены они не одинаково. Более того, в случае б) этот ответ тоже годится, что нетрудно проверить (избавляясь от  $\alpha$  в (1) с помощью соотношения (2), получаем (3)).

**Ответ:**  $V = \frac{l^3}{3} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} - \cos^2 \alpha}.$

Подчеркнем, что решение, при котором разобран только случай а), не может считаться полным.

**Задача 5.** Основанием пирамиды  $SABC$  служит треугольник, у которого  $AB = BC = 20$ ,  $AC = 32$ , углы между плоскостью основания и каждой из боковых граней равны  $45^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

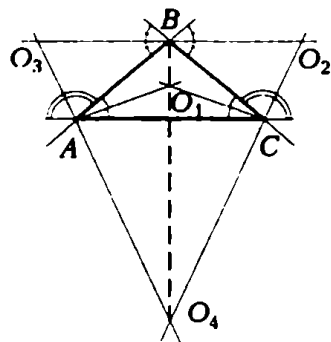


Рис.4

**Решение.** Основанием высоты пирамиды служит точка, равноудаленная от прямых  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , т.е. центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , или одной из внеписанных (задача 1,6). Поэтому условию задачи удовлетворяют четыре пирамиды, основаниями высот которых служат точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  (рис.4). Для вычисления объема этих пирамид достаточно опреде-

лить высоты  $SO_1$ ,  $SO_2$ ,  $SO_3$ ,  $SO_4$ , так как площадь основания равна  $S = S_{\triangle ABC} = 192$ . Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом  $45^\circ$ , высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ , или одной из внеписанных, центр которой — основание высоты пирамиды.

1) Пирамида с высотой  $SO_1$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (20 + 20 + 32) r_1 = 36 r_1; \quad 36 r_1 = 192;$$

$$r_1 = h_1 = 5 \frac{1}{3}, \text{ откуда } V = 341 \frac{1}{3}.$$

2) Пирамиды с высотами  $SO_2$  и  $SO_3$  равны. Имеем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(ACr_2 - BCr_2) = 16r_2;$$

$$16r_2 = 192; r_2 = h_2 = 12; \text{отсюда } V_2 = V_3 = 768.$$

3) Пирамида с высотой  $SO_4$ . Имеем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(ABr_4 - BCr_4 - ACr_4) = 4r_4;$$

$$4r_4 = 192; r_4 = h_4 = 48; V_4 = 3072.$$

Ответ:  $341\frac{1}{3}$ ; 768; 3072.

### Упражнения

1. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны  $a$  и  $2a$ . Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания; высота пирамиды равна  $a$ . Найдите боковую поверхность пирамиды.

2. Основанием пирамиды  $SABC$  служит треугольник  $ABC$ , у которого  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Боковая грань, которая проходит через сторону  $AC$ , перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите отношение объемов пирамид  $SABC$  и  $SOBC$ , где  $O$  — основание высоты пирамиды  $SABC$ .

3. В основании пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB = c$  и острым углом  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды, если известно, что боковое ребро  $SC$  наклонено к плоскости основания под углом  $\beta$ , а направленные отрезки  $\vec{AO}$ ,  $\vec{BO}$ ,  $\vec{CO}$  при последовательном их расположении образуют замкнутую ломаную линию.

4. Основания параллелепипеда — квадраты со стороной  $b$ , а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

5. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ , длины катетов  $AB$  и  $AC$  которого равны  $a$ . Боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  образуют с плоскостью основания угол в  $60^\circ$ , а диагональ  $BC_1$  боковой грани  $CBB_1C_1$  перпендикулярна ребру  $AC$ . Найдите объем призмы, если длина диагонали  $BC_1$  равна  $a\sqrt{6}$ .

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 1.** *Правильная треугольная пирамида с двугранным углом  $\alpha$  при ребре основания пересечена плоскостью, параллельной основанию, так, что площадь полученного сечения равна площади боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Определите отношение площади основания к площади сечения.*

**Решение.** Если решать эту задачу, рассматривая сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и апофему

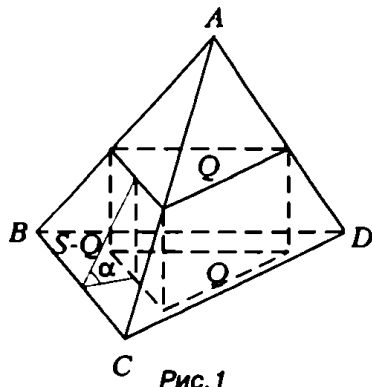


Рис. 1

боковой грани, то после достаточно сложных вычислений получается ответ  $1 + \cos \alpha$ . То обстоятельство, что искомое отношение просто выражается через данную величину, ведет к дальнейшим размышлениям. Случайно ли это? Очевидно, нет. Скорее всего должно существовать и простое решение задачи. Посмотрим внимательно на ответ. Полученное соотношение связывает площадь  $S$  основания, площадь  $Q$  сечения (равную по условию

площади боковой поверхности усеченной пирамиды) и двугранный угол при ребре основания (рис.1).

Но согласно известной формуле площади ортогональной проекции многоугольника  $S - Q = Q \cdot \cos \varphi$ , откуда

$$\frac{S - Q}{Q} = \cos \varphi, \quad \frac{S}{Q} = 1 + \cos \varphi.$$

И во многих других случаях применение формулы площади проекции является тем элементом, который непосредственно ведет к решению задачи.

**Задача 2.** Основанием пирамиды служит параллелограмм, площадь которого равна  $Q$ . Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей параллелограмма. Одна из боковых граней составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ , другая — угол  $\beta$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**Решение.** Ввиду того, что

$$S_{\Delta BAC} = S_{\Delta DAE}, S_{\Delta CAD} = S_{\Delta EAB}, S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD} = \frac{Q}{4}$$

(рис.2), сразу находим:

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= 2(S_{\Delta BAC} + S_{\Delta CAD}) = 2\left(\frac{S_{\Delta BOC}}{\cos \alpha} + \frac{S_{\Delta COD}}{\cos \beta}\right) = \\ &= 2\left(\frac{Q}{4 \cos \alpha} + \frac{Q}{4 \cos \beta}\right) = \frac{Q(\cos \alpha + \cos \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

**Задача 3.** В основании пирамиды лежит ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ . Две боковые грани, которые содержат стороны острого угла основания, перпендикулярны основанию, две другие наклонены к основанию под углом  $\beta$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

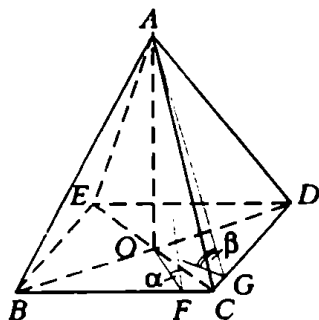


Рис.2

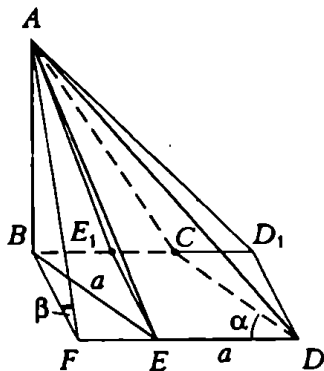


Рис.3

**Решение.** Легко заметить, что проекция  $E_1AD_1$  (рис.3) боковой грани  $EAD$  на плоскость боковой грани  $BAC$  равновелика грани  $BAC$ , причем двугранный угол между этими гранями равен  $\pi/2 - \beta$ , а проекцией грани  $AED$  на плоскость основания ромба является треугольник  $BED$ . Поэтому

$$S_{\text{бок}} = 2(S_{\Delta EAD} + S_{\Delta BAC}) = 2(S_{\Delta EAD} + S_{\Delta E_1AD_1}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left( S_{\triangle EAD} + S_{\triangle EAD} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \right) = 2 S_{\triangle EAD} (1 + \sin \beta) = \\
 &= 2 \cdot \frac{S_{\triangle BED}}{\cos \beta} (1 + \sin \beta) = \frac{a^2 \sin \alpha (1 + \sin \beta)}{\cos \beta}.
 \end{aligned}$$

**Задача 4.** В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар; боковая грань этой пирамиды служит основанием другой пирамиды, вершина которой в центре шара и объем которой равен  $1/6$  объема данной пирамиды. Определите величины двугранного угла при основании и плоского угла при вершине четырехугольной пирамиды.

**Решение.** Известно, что  $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r$  (рис.4). Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{S_{\text{полн}}}{S_{\text{бок}}} - 1 = \frac{\frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r}{\frac{1}{3} (4 S_{\triangle CAD}) \cdot r} - 1 = \frac{V_{\triangle BCDE}}{4 V_{O_1 CAD}} - 1 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}; \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{DF}{AF} = \frac{OF}{AF} = \cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

**Задача 5.** Установите зависимость между косинусами углов  $\alpha$  и  $\beta$ , которые образует в правильной треугольной пирамиде

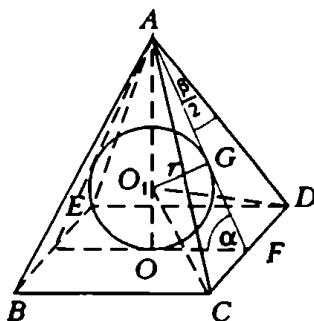


Рис.4

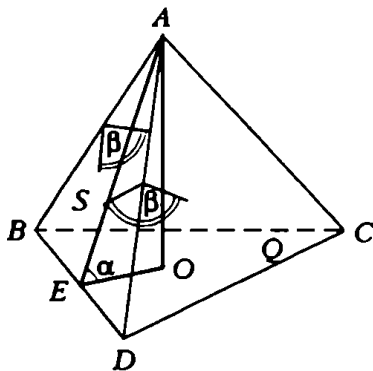


Рис.5

боковая грань с плоскостью основания и со смежной боковой гранью.

**Решение.** Пусть (рис.5)  $BCD \perp AO$ ,  $AE \perp BD$ ,  $\angle AEC = \alpha$ ,  $S_{\triangle BDC} = Q$ ,  $S_{\triangle ABD} = S$ . Тогда, проектируя грань  $ABD$  на грань  $BCD$ , получим равенство  $Q = 3S \cos \alpha$ , а проектируя грани  $BCD$ ,  $ABC$  и  $ACD$  на грань  $ABD$ , получим равенство  $S = Q \cos \alpha + 2S \cos \beta$ . Из этих двух равенств находим искомую зависимость:

$$3 \cos^2 \alpha + 2 \cos \beta - 1 = 0.$$

Аналогично легко доказывается общая формула для правильной  $n$ -угольной пирамиды:

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \alpha = \cos \frac{\beta}{2}.$$

Иногда применение формулы площади ортогональной проекции является не только полезным, но и приводит к эффектному решению.

**Задача 6.** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведены два сечения: одно — через диагонали оснований и другое — через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен  $\alpha$ . Найдите отношение площадей сечений.

**Решение.** В этой задаче существенным является аккуратно построенный чертеж. Само решение не вызывает затруднений. В самом деле, сечениями будут трапеции  $BB_1D_1D$  и  $DA_1B_1C$  (рис. 6), пересекающиеся по диагонали  $B_1D$  и образующие между собой угол  $\alpha$ . Легко заметить, что точка  $A_1$  проектируется в точку  $O_1$ , а точка  $C$  — в точку  $O$  ( $O$  и  $O_1$  — центры оснований), поэтому  $DA_1B_1C$  проектируется в четырехугольник  $DO_1B_1O$ , откуда

$$\frac{S_{BB_1D_1D}}{S_{DA_1B_1C}} = \frac{2S_{DO_1B_1O}}{S_{DA_1B_1C}} = 2 \cos \alpha.$$

**Задача 7.** Дан куб  $ABCA'D'B'C'D'$ , длина ребра которого равна 1. На ребрах  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $DD'$  взяты соответственно точки  $K$ ,  $P$  и  $M$  так, что  $AK : A'K = 1 : 3$ ,  $BP : B'P = 3 : 1$ ,  $DM : D'M = 3 : 1$ . Найдите объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $P$  и  $M$ , а вершина расположена в точке  $A'$ .

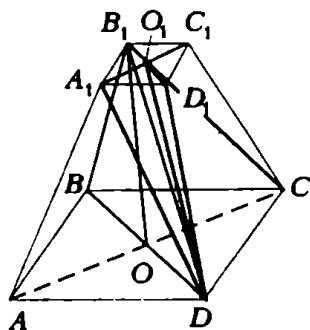


Рис. 6

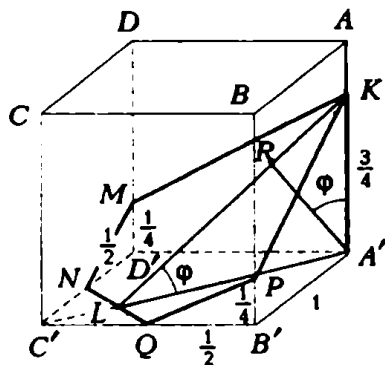


Рис. 7



**Решение.** Нетрудно найти, что секущая плоскость пересекает основание  $A'B'C'D'$  в серединах  $Q$  и  $N$  сторон  $B'C'$  и  $C'D'$  (рис.7), откуда следует, что площадь проекции сечения  $KPQNM$  на плоскость основания  $A'B'C'D'$  равна  $S_{A'B'QND'} = S_{A'B'C'D'} - S_{\Delta QC'N} = 1 - 1/8 = 7/8$ . Линейным углом двугранного угла  $QN$  будет угол  $KLA'$ , причем он равен углу  $KA'R$  ( $R$  — основание высоты  $A'R$  пирамиды  $A'KPQNM$ ), откуда следует, что  $A'R = A'K \cos \varphi$ .

Применяя формулу площади проекции, находим

$$\begin{aligned} V_{A'KPQNM} &= \frac{1}{3} S_{KPQNM} \cdot A'R = \frac{1}{3} \frac{S_{A'B'QND'}}{\cos \varphi} \cdot A'K \cos \varphi = \\ &= \frac{1}{3} S_{A'B'QND'} \cdot A'K = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{32}. \end{aligned}$$

(Интересно заметить, что пирамиды  $A'KPQNM$  и  $KA'B'QND'$  равновелики.)

### Упражнения

1. Боковая поверхность правильной десятиугольной пирамиды равна  $S$ , а площадь ее основания равна  $Q$ . Найдите объем пирамиды.

2. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна  $\sqrt{13}$ , а величина плоского угла при ее вершине в четыре раза больше величины угла между боковым ребром и основанием. Найдите площадь боковой поверхности.

3. Точки  $K$  и  $M$  являются серединами ребер  $AB$  и  $AC$  треугольной пирамиды  $DABC$ ,  $S_{\Delta ABC} = p$ . Найдите  $S_{\Delta BCD}$ , если  $S_{\Delta DKM} = q$ , а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан основания  $ABC$ .

4. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Через его смежные стороны проведены диагональные сечения, образующие с плоскостью основания угол  $\alpha$ , а между собой — угол  $\beta$ . Докажите, что

$$\cos^2 \alpha = \cos \beta.$$

5. В треугольной пирамиде с площадью основания  $Q$ , площадью боковой поверхности  $S$  и суммой двугранных углов при ребрах основания  $3\alpha$  вершина проектируется в точку пересечения медиан основания. Докажите, что

$$Q \leq S \cos \alpha.$$

Один из красивых приемов, который может быть использован при решении геометрических задач, состоит в замене изучаемой геометрической фигуры другой, в каком-то смысле более удобной. Так, например, если в условии задачи фигурирует треугольник, в котором проведена медиана, часто полезно достроить этот треугольник до параллелограмма, продолжая медиану на расстояние, равное ей самой. В данной статье рассматриваются несколько задач про треугольную пирамиду — тетраэдр, — которые оказывается возможным решить, достраивая тетраэдр до другого многогранника (как правило, параллелепипеда).

Первый способ достраивания пирамиды до параллелепипеда изображен на рисунке 1. Здесь  $AA_1BD$  — данная пирамида, а плоскости граней  $DCC_1D_1$ ,  $CBV_1C_1$  и  $A_1B_1C_1D_1$  параллелепипеда проходят через одну вершину пирамиды и параллельны грани пирамиды, противоположащей этой вершине.

**Задача 1.** Дана треугольная пирамида  $AA_1BD$ , в которой ребра  $AA_1$ ,  $AB$  и  $AD$  попарно перпендикулярны, а их длины равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

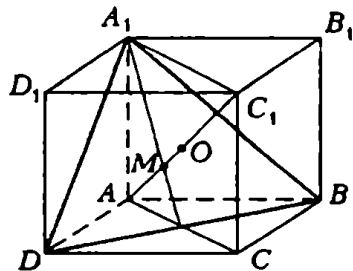


Рис. 1

а) Докажите, что вершина  $A$  пирамиды, точка пересечения медиан грани  $A_1BD$  и центр описанного шара лежат на одной прямой.

б) Найдите радиус шара, описанного около этой пирамиды.

**Решение.** Достроим пирамиду  $AA_1BD$  до параллелепипеда (прямоугольного!), как показано на рисунке 1. Тогда шар, описанный около этой пирамиды, является одновременно описанным шаром и для всего параллелепипеда. Радиус этого шара

равен половине диагонали параллелепипеда, а именно  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ , это является ответом на пункт б).

Чтобы доказать утверждение пункта а), рассмотрим прямоугольник  $AA_1C_1C$  (советуем сделать для него отдельный чертеж). Центр  $O$  шара находится на диагонали  $AC_1$ , медиана  $A_1O_1$  треугольника  $A_1BD$  пересекается с  $AC_1$  в точке  $M$ , и если мы докажем, что  $A_1M/MO_1 = 2$ , то это будет означать, что  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $A_1BD$ ; тем самым мы докажем утверждение пункта а). Из подобия треугольников  $A_1C_1M$  и  $AO_1M$  следует:

$$A_1M/MO_1 = A_1C_1/AO_1 = 2,$$

что и требовалось доказать.

Другой часто встречающийся способ достраивания тетраэдра до параллелепипеда состоит в следующем. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничат некоторый параллелепипед (рис.2), диагоналями граней которого будут ребра исходного тетраэдра. Небольшой практический совет: чертеж удобнее начинать с изображения параллелепипеда.

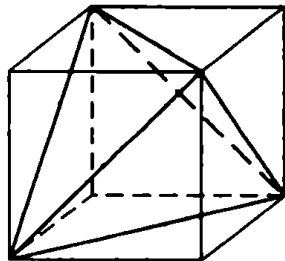


Рис.2

**Задача 2.** Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра, длина ребра которого равна  $a$ .

**Решение.** Как легко видеть из рисунка 2, построенный описанным способом параллелепипед будет кубом с ребром  $a\sqrt{2}$ , шар, вписанный в этот куб, будет искомым. **Ответ:**  $a/2\sqrt{2}$ .

Первый из предложенных способов достраивания тетраэдра до параллелепипеда удобен, когда даны плоские углы при одной из вершин тетраэдра (особенно если все они прямые), второй используется в задачах, в которых фигурируют скрещивающиеся ребра тетраэдра.

**Задача 3.** Длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра равны  $a$ , два других скрещивающихся ребра имеют длину  $b$  и оставшиеся два —  $c$ . Найдите расстояние между центром вписанного в тетраэдр шара и центром шара, касающегося одной из граней тетраэдра и продолжений остальных граней.

**Решение.** На рисунке 3  $ABCD$  — данный тетраэдр, а параллелепипед ограничен плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Так как диа-

гонали каждой грани равны соответственно противоположным ребрам тетраэдра, которые по условию равны, то все грани параллелепипеда — прямоугольники, а сам параллелепипед — прямоугольный.

Центр вписанного в тетраэдр  $ABCD$  шара совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда (докажите!), а центр шара, касающегося грани  $DCB$  тетраэдра (из дальнейшего видно, что ответ не зависит от выбора грани) и продолжений его остальных граней, совпадает с вершиной  $L$  параллелепипеда (она равноудалена от граней  $DCB$  и  $ACD$  — для доказательства рассмотрите пирамиду  $B'LCD$ , где  $B'L = LB$ , равную пирамиде  $BLCD$ ; точки  $A, D, B'$  и  $C$  лежат в одной плоскости; аналогично доказывается, что точка  $L$  равноудалена от плоскостей  $DCB$  и  $ACB$ ,  $DCB$  и  $ADB$ ).

Значит, расстояние, о котором говорится в условии задачи, равно половине длины диагонали параллелепипеда. Обозначим через  $x, y, z$  длины ребер параллелепипеда (см. рис.3). По теореме Пифагора получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2, \end{cases}$$

складывая которые, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{AL}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}. \end{aligned}$$

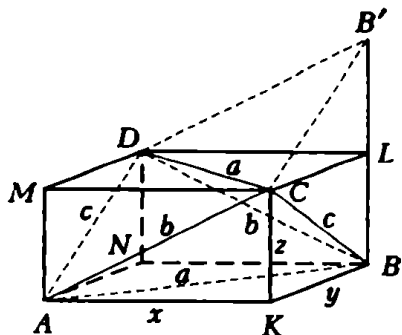


Рис.3

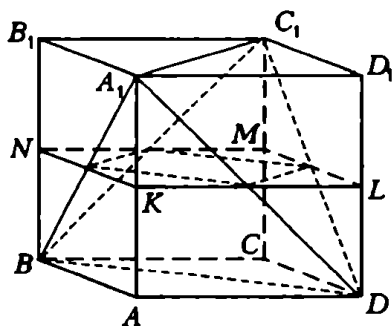


Рис.4

**Задача 4.** Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам и равноудаленной от этих ребер, имеет площадь  $S$ . Расстояние между этими скрещивающимися ребрами тетраэдра  $h$ . Найдите объем тетраэдра.

**Решение.** Пусть  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  — параллелепипед, ограниченный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам (рис.4). Тогда объем тетраэдра  $A_1BC_1D$  равен объему параллелепипеда минус объемы

четырех треугольных пирамид (одна из них  $A_1ABD$ ), объем каждой из которых равен  $1/6$  объема параллелепипеда (почему?). Значит,  $V_{\text{тетр}} = V_{\text{пар}}/3$ .

Пусть скрещивающиеся ребра, о которых говорится в условии, —  $A_1C_1$  и  $BD$ , а  $KLMN$  — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ . Тогда вершинами сечения, о котором говорится в условии, будут середины сторон параллелограмма. Следовательно, площадь параллелограмма  $KLMN$  равна  $2S$  и равна площади основания  $ABCD$  параллелепипеда. Теперь найдем объемы параллелепипеда и тетраэдра:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} V_{\text{пар}} = \frac{2}{3} Sh.$$

С помощью только что решенной задачи нетрудно доказать справедливость формулы Симпсона, служащей для вычисления объема многогранников специального вида.

*Дан многогранник, все вершины которого лежат в двух параллельных плоскостях, находящихся на расстоянии  $h$  друг от друга. Пусть  $S_1$  — площадь грани, лежащей в одной плоскости,  $S_2$  — площадь грани, расположенной во второй плоскости, а  $S_{\text{ср}}$  — площадь сечения многогранника плоскостью, удаленной на расстояние  $\frac{h}{2}$  от каждой из данных плоскостей. Тогда для объема многогранника справедлива формула:*

$$V = \frac{h}{6} (S_1 + S_2 + 4S_{\text{ср}}).$$

Для доказательства проверьте, что эта формула верна, если многогранник является тетраэдром, а потом разбейте произвольный многогранник, вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях, на тетраэдры с вершинами в этих же плоскостях: площади граней тетраэдров, расположенных в одной плоскости, в сумме дадут  $S_1$ , расположенных во второй плоскости дадут в сумме  $S_2$ , а сумма площадей средних сечений тетраэдров равна  $S_{\text{ср}}$  многогранника.

В заключение приведем пример задачи, в которой оказывается удобнее достраивать тетраэдр не до параллелепипеда, а до треугольной призмы.

**Задача 5.** В тетраэдре площади двух граней равны  $S_1$  и  $S_2$ , двугранный угол между ними равен  $\alpha$ , площади двух других граней  $Q_1$  и  $Q_2$ , угол между ними  $\beta$ . Докажите, что

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \cos \beta.$$

**Решение.** Докажем сначала, что если площадь одной боковой грани треугольной призмы равна  $S$ , две другие грани имеют

площади  $S_1$  и  $S_2$ , а двугранный угол между ними  $\alpha$ , то

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = S^2.$$

В самом деле, пусть плоскость  $ABC$  (рис.5) перпендикулярна боковым ребрам призмы,  $\angle BAC = \alpha$ . Запишем теорему косинусов для треугольника  $ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha.$$

Осталось умножить последнее равенство на  $l^2$ , где  $l$  — длина бокового ребра призмы.

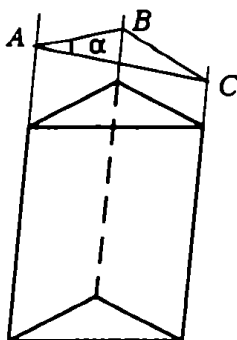


Рис.5

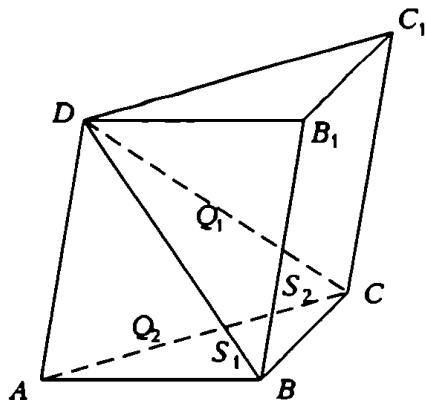


Рис.6

Перейдем теперь к решению задачи 5. Пусть  $ABCD$  — данный тетраэдр,  $S_{\triangle ABD} = S_1$ ,  $S_{\triangle ADC} = S_2$ ,  $S_{\triangle ABC} = Q_1$ ,  $S_{\triangle DBC} = Q_2$ , двугранный угол при ребре  $AD$  равен  $\alpha$ , а при ребре  $BC$  —  $\beta$ . Рассмотрим треугольную призму с основанием  $ABC$ , одно из боковых ребер которой —  $AD$  (рис.6). Обозначим через  $S$  площадь параллелограмма  $BB_1C_1C$ , тогда по только что доказанной нами формуле

$$4S_1^2 + 4S_2^2 - 8S_1S_2 \cos \alpha = S^2,$$

причем  $S$  легко выразить через длины ребер  $BC$  и  $AD$  и угол  $\varphi$  между ними:  $S = AD \cdot BC \cdot \sin \varphi$ .

Если мы рассмотрим другую треугольную призму с основанием  $ACD$  и боковым ребром  $BC$ , то получим

$$4Q_1^2 + 4Q_2^2 - 8Q_1Q_2 \cos \beta = S^2.$$

Отсюда следует утверждение задачи 5.

### Упражнения

1. Докажите, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.

2. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Докажите, что его ребра  $AD$  и  $BC$  взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство

$$AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2.$$

3. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны  $a$ , длины двух других противоположных ребер равны  $b$ , оставшихся двух —  $c$ . Найдите

а) объем этого тетраэдра;

б) радиус описанного вокруг него шара.

4. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны  $a$  и  $a_1$ , угол между ними равен  $\alpha$ , длины двух других ребер соответственно равны  $b$  и  $b_1$ , угол между ними  $\beta$  и, наконец, длины двух оставшихся ребер равны  $c$  и  $c_1$ , угол между ними  $\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \leq \pi/2$ ).

а) Докажите, что одно из чисел  $aa_1 \cos \alpha$ ,  $bb_1 \cos \beta$ ,  $cc_1 \cos \gamma$  равно сумме двух других.

б) Найдите углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , если даны  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$ ,  $b_1$ ,  $c$ ,  $c_1$ .

В этой статье разбираются решения нескольких довольно трудных и, на наш взгляд, полезных задач на вычисление объемов пересечений тел. Основная трудность подобных задач заключается в том, что при их решении требуется хорошо развитое пространственное воображение. В частности, при решении любой задачи о пересечении тел очень важно суметь сделать хороший чертеж. Нередко именно от чертежа зависит успех в решении задачи. Прежде чем перейти к разбору задач, дадим вам следующий совет: прочтя условие той или иной задачи, не смотрите сразу же ее решение, подумайте некоторое время, попытайтесь сделать чертеж и решить задачу самостоятельно. Тогда вы получите и удовлетворение, и возможность сравнить свое решение с предлагаемым в статье (вполне возможно, что вам удастся придумать решение, отличное от приводимого в статье). Если ваши усилия не увенчаются успехом, то все равно время, потраченное на раздумья, пойдет на пользу и облегчит чтение статьи.

**Задача 1.** *В кубе с ребром  $a$  помещены три правильные четырехугольные призмы, вершины каждой из которых являются серединами ребер двух противоположных граней куба. Найдите объем части куба, принадлежащей всем этим трем призмам.*

**Решение.** Поскольку довольно трудно представить себе, а тем более сразу изобразить искомое тело, поступим следующим образом. Поместим сначала в куб одну призму (рис.1), затем посмотрим, что «отсечет» от нее вторая, и, наконец, что останется, когда мы добавим третью призму.

Пусть вершинами второй призмы являются середины ребер  $AA_1$ ,  $A_1D_1$ ,  $D_1D$ ,  $AD$ ,  $BB_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1C$  и  $CB$  (основания этой призмы лежат в «передней» и «задней» гранях куба). Ребро второй призмы, соединяющее середины ребер  $DD_1$  и  $CC_1$  куба,



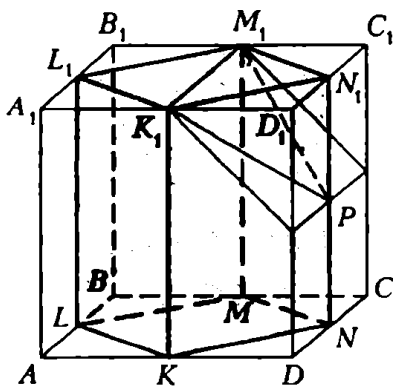


Рис.1

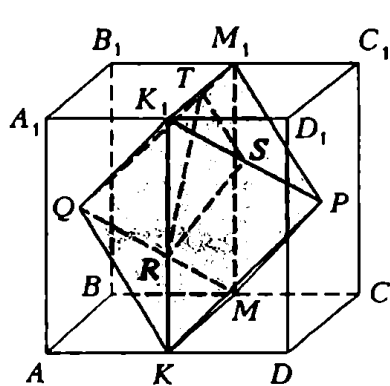


Рис.2

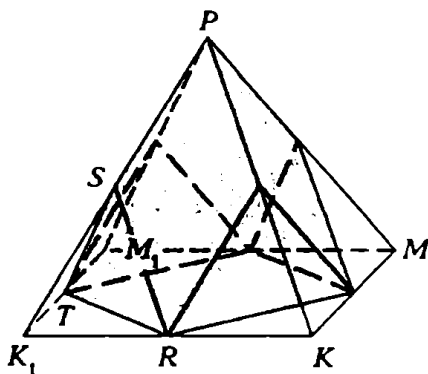


Рис.3

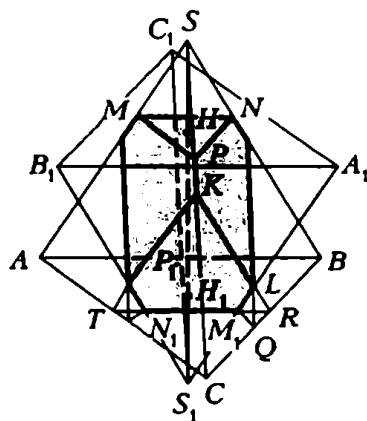


Рис.4

пересекает отрезок  $NN_1$  в его середине. Значит, грань второй призмы, проходящая через точки  $K_1M_1$  и середины ребер  $DD_1$  и  $CC_1$ , пересекаются с гранью  $KK_1N_1N$  по прямой  $K_1P$ , а вся эта грань второй призмы отсекает от первой пирамиду  $K_1M_1PN_1$ .

Проведя аналогичные рассуждения для остальных граней второй призмы, мы можем изобразить общую часть первых двух призм (рис.2). Она представляет собой две четырехугольные пирамиды  $KK_1M_1MP$  и  $KK_1M_1MQ$  ( $P$  и  $Q$  — центры граней  $DCC_1D_1$  и  $ABB_1A_1$ ), сумма объемов которых равна  $a^3/3$ , так как  $S_{KK_1M_1M} = a^2$  и  $PQ = a$ .

Теперь посмотрим, что «отрежет» от этого тела третья призма, основания которой лежат в гранях  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$ . Боковые грани этой призмы «срежут» четыре вершины:  $K_1$ ,  $M_1$ ,  $K$  и  $M$ . На рисунке 3 изображена пирамида  $KK_1M_1MP$  со «срезанными» третьей призмой углами. «Отрезанные» углы являются равными

треугольными пирамидами. (Одна из них —  $RTSK_1$ , где  $R$ ,  $T$  и  $S$  — середины  $KK_1$ ,  $K_1M_1$  и  $PK_1$ ). Объем каждой из них составляет  $1/16$  часть объема пирамиды  $KK_1M_1MP$  (это легко проверяется; например, объем пирамиды  $RTSK_1$  в восемь раз меньше объема пирамиды  $KM_1PK_1$ , который вдвое меньше объема пирамиды  $PKK_1M_1M$ ; подробные вычисления и доказательства проведите самостоятельно).

Таким образом, от пирамид отсекается  $4 \times 1/16 = 1/4$  часть. Объем общей части всех трех призм составляет  $3/4$  объема общей части первой и второй призм, равного  $a^3/3$ , т.е. он равен  $a^3/4$ .

**Задача 2.** Даны две равные правильные треугольные пирамиды объемом  $V$  каждая, расположенные симметрично относительно точки  $O$ . Найдите объем общей части этих двух пирамид, если точка  $O$  лежит на высоте одной из них и делит эту высоту в отношении  $2:1$ , считая от вершины пирамиды.

**Решение.** В этой задаче чрезвычайно важно, хотя и достаточно трудно, сделать правильный, хороший, обоснованный чертеж. Пусть  $SABC$  — первая пирамиды. Основание  $A_1B_1C_1$  второй пирамиды пересекает высоту  $SH_1$  в точке  $H$ , делящей ее в отношении  $1:2$  (считая от вершины  $S$ ), а в пересечении с пирамидой  $SABC$  дает треугольник  $MNP$ , подобный треугольнику  $ABC$ ,  $MN = \frac{1}{3}AB$ .

Отсюда легко вывести (проверьте!), что треугольник  $MNP$  целиком находится внутри треугольника  $A_1B_1C_1$ . Аналогично внутри основания  $ABC$  будет находиться треугольник  $M_1N_1P_1$ , являющийся сечением второй пирамиды плоскостью треугольника  $ABC$ .

Теперь можно изобразить тело, являющееся общей частью рассматриваемых двух пирамид (рис.4), причем положение, например, точки  $L$  находится так: надо соединить точку  $S$  с серединой ребра  $BC$ , пересечение этой прямой с прямой  $S_1A_1$  даст точку  $L$  (для доказательства рассмотрите сечение пирамид плоскостью  $SA_1S_1$ ). Аналогично находятся остальные точки на рисунке 4. Для вычисления искомого объема мы должны от объема пирамиды  $SABC$  отнять объем пирамиды  $SMNP$  (этот объем составляет  $\frac{1}{27}V$ ), затем отнять объемы трех одинаковых пирамид, равных  $KTRC$ , и прибавить объемы трех «маленьких» пирамид, равных  $QM_1RL$ .

Найдем объем пирамиды  $KTRC$ . Так как плоскость  $KRT$  параллельна плоскости  $SAB$ , то  $V_{KTRC} = (TR/AB)^3 V$ . Аналогич-

но,  $V_{QM,RL} = (M_1R/AB)^3 V$ . Но  $M_1R = (TR - M_1N_1)/2 = (3TR - AB)/6$ . Нам осталось найти  $TR/AB$ . Треугольники  $ABC$  и  $M_1N_1P_1$  правильные, имеют соответственно параллельные стороны, их центры совпадают, и  $M_1N_1 = AB/3$ . Отсюда легко найти, что  $TR/AB = 5/9$ ,  $M_1R/AB = 1/9$  (проверьте!). Искомый объем равен

$$V - \frac{1}{27}V - 3 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 V + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 V = \frac{110}{243} V.$$

**Задача 3.** Дан куб с ребром  $a$ . Второй куб получается из данного поворотом вокруг его диагонали на угол  $\alpha$  ( $\alpha \leq 60^\circ$ ). Найдите объем общей части этих кубов.

**Решение.** В этой задаче представить себе и изобразить пересечение тел в целом трудно, легче понять, как пересекаются отдельные элементы одного тела с элементами другого тела.

Обозначим вершины данного куба буквами  $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$  (рис. 5), и пусть куб поворачивается вокруг диагонали  $B_1D$  против хода часовой стрелки. Посмотрим, какие куски исходного куба могут срезаться при его повороте. Вершины куба расположены дальше всего от центра куба  $O$  — середины диагонали  $B_1D$ , которая остается на месте. Поэтому уйти при повороте внутрь куба вершины не могут, наоборот, они окажутся вне куба и срезаться будут куски куба около вершин. Далее, срезать куски куба могут только грани. Поэтому достаточно найти, какой кусок куба срезает каждая грань.

Найдем, что срезает грань  $DCC_1D_1$ . Подскажем сразу ответ: срезается пирамида  $D_1LPD$  (см. рис. 5), где  $D_1L = D_1K = C_1P$ , причем основания перпендикуляров, опущенных из точек  $L$  и  $K$  на  $B_1D$ , совпадают (докажите!) в точке, которая на рисунке 5 обозначена буквой  $M$ , и  $\angle LMK = \alpha$ . Таким образом, при повороте куба точка  $K$  переходит в

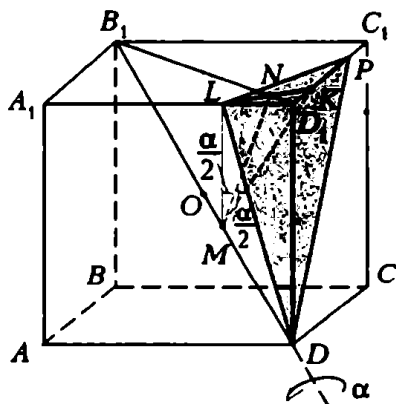


Рис. 5

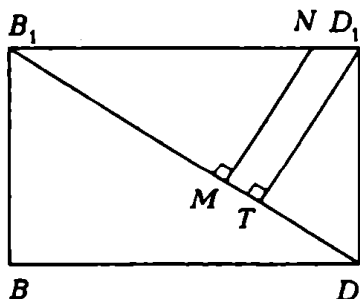


Рис. 6

точку  $L$ . Обозначим  $LD_1$  через  $x$  (его мы найдем позднее). Пусть  $Q$  — точка на ребре  $CC_1$ ,  $C_1Q = C_1P = x$ . Тогда при повороте куба точка  $Q$  переходит в точку  $P$  (докажите!). Итак, грань  $DCC_1D_1$  пересекает куб по треугольнику  $LPD$  и отсекает пирамиду  $D_1LPD$  объемом  $\frac{1}{6}ax(a-x)$  (докажите!). Аналогично рассматриваются остальные грани — они отсекают такие же пирамиды. Поэтому объем общей части кубов будет  $a^3 - ax(a-x)$ . Осталось найти  $x$ .

Пусть  $N$  — точка пересечения  $B_1D_1$  и  $LK$ . Изобразим на отдельном чертеже (рис. 6) прямоугольник  $BDD_1B_1$ . Пусть  $T$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $D_1$  на  $B_1D$ . Имеем:  $LN = ND_1 = LK/2 = x\sqrt{2}/2$  (см. рис. 5). Из  $\triangle LMK$  получим:

$$MN = LN \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$B_1N = B_1D_1 - ND_1 = a\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Легко из  $\triangle B_1D_1D$  найти  $D_1T$ :  $D_1T = a\sqrt{2/3}$ . Из подобия треугольников  $B_1NM$  и  $B_1D_1T$  получим:

$$\frac{B_1N}{B_1D_1} = \frac{NM}{D_1T},$$

$$\frac{a\sqrt{2} - x\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{x\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}},$$

откуда  $x = 2a / \left(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)$ , и искомый объем равен

$$V = a^3 - \frac{2a^2}{1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \left( a - \frac{2a}{1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{3a^3}{2(1 + \cos(\alpha - 60^\circ))}.$$

**Задача 4.** Дан куб  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$ . Середины двух его противоположных ребер  $AB$  и  $C_1D_1$  служат серединами двух скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, причем на одном из этих ребер лежит соответствующее ребро куба. Найдите объем общей части куба и тетраэдра.

**Решение.** Пусть точка  $K$  — середина  $AB$  — является серединой ребра  $PQ$  правильного тетраэдра, а  $M$  — середина  $D_1C_1$  и одновременно середина ребра  $RS$  тетраэдра ( $D_1C_1$  лежит на  $RS$  (рис. 7)).

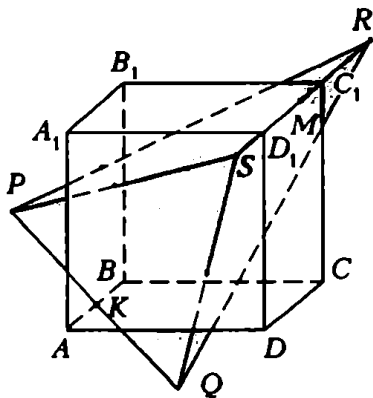


Рис. 7

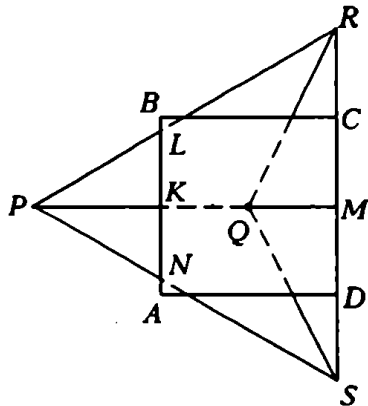


Рис. 8

Если ребро тетраэдра равно  $b$ , то расстояние между серединами его скрещивающихся ребер легко вычисляется, оно равно  $b\sqrt{2}/2$  (проверьте!). С другой стороны,  $MK = a\sqrt{2}$ . Значит,  $b = 2a$ .

Мы знаем длину ребра тетраэдра, однако не так просто изобразить пересечение данных тел — неясно, будут ли ребра тетраэдра пересекать куб. Чтобы ответить на этот вопрос, спроектируем данные тела на плоскость  $ABCD$  (рис. 8). Поскольку  $PQ$  составляет с этой плоскостью угол  $45^\circ$  (докажите!), то длина проекции  $PQ$  на эту плоскость будет

$$b \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

Пусть  $L$  — точка пересечения проекций прямых  $AB$  и  $PR$ . Из подобия треугольников  $PLK$  и  $PMR$  легко найдем:

$$LK = \frac{RM \cdot PK}{PM} = a \frac{1}{1 + \sqrt{2}} < \frac{a}{2}.$$

Значит, ребро  $PR$  тетраэдра (а следовательно, и другие ребра:  $PS$ ,  $QR$  и  $QS$ ) пересекает куб.

Для вычисления объема удобно изобразить заданное тело как тетраэдр со срезанными углами. Чтобы определить, какую часть объема тетраэдра составляет каждая из срезанных пирамид, удобно воспользоваться следующим утверждением (докажите его самостоятельно), которое оказывается полезным довольно часто.

Даны две пирамиды  $SABC$  и  $SA_1B_1C_1$ , причем  $A_1$  лежит на  $SA$ ,  $B_1$  на  $SB$ ,  $C_1$  на  $SC$ . Тогда отношение объемов этих пирамид равно отношению произведений длин ребер, выходящих из

вершины  $S$ , а именно

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}{SA \cdot SB \cdot SC}.$$

Теперь легко можно найти объемы пирамид, «отрезанных» от вершин  $P$  и  $Q$ . Каждый из них составляет

$$\frac{PK}{PQ} \cdot \frac{PL}{PR} \cdot \frac{PN}{PS} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2(3+2\sqrt{2})}$$

часть объема тетраэдра, а объемы пирамид, «отрезанных» от вершин  $R$  и  $S$ , составляют  $1/16$  объема тетраэдра (проверьте!). Объем тетраэдра равен  $b^3\sqrt{2}/12 = 2a^3\sqrt{2}/3$ . Значит, объем общей части куба и тетраэдра будет равен

$$\frac{2a^3\sqrt{2}}{3} \left( 1 - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} - \frac{1}{8} \right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} (16\sqrt{2} - 17).$$

### Упражнения

1. Даны две правильные треугольные пирамиды, симметричные относительно точки  $O$ , расположенной на высоте одной из этих пирамид. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если точка  $O$  делит эту высоту, считая от вершины пирамиды, в отношении: а)  $3 : 1$ ; б)  $1 : 1$ ; в)  $4 : 1$ .

2. Дан правильный тетраэдр объемом  $V$ . Второй тетраэдр получается из данного поворотом его на угол  $\alpha$  вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Найдите объем общей части этих двух тетраэдров.

3. Треугольная пирамида  $PQMN$  и куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  расположены следующим образом: середина ребра  $PQ$  совпадает с серединой ребра  $AB$  и  $PQ = 2AB$ , ребро  $D_1 C_1$  лежит на ребре  $MN$ , их середины совпадают,  $MN = 3D_1 C_1$ . Какая часть объема пирамиды расположена внутри куба, если известно, что  $PQ$  перпендикулярно плоскости  $ABD_1 C_1$ ?

4. Ребро одного правильного тетраэдра служит апофемой другого тетраэдра. Апофема противоположной данному ребру грани первого тетраэдра лежит на ребре второго. Какая часть объема первого тетраэдра расположена внутри второго?

5. Центры куба и правильного тетраэдра совпадают, два ребра тетраэдра параллельны диагоналям одной из граней куба. Найдите объем части тетраэдра, находящейся внутри куба, если ребро куба равно  $a$ , ребро тетраэдра равно  $\frac{3a}{2}\sqrt{2}$ .

6. Внутри правильной треугольной пирамиды находится вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания пирамиды. В каком отношении поверхность трехгранного угла делит объем пирамиды, если известно, что боковая поверхность пирамиды разделена на две равные по площади части?

7. Диагональ единичного куба лежит на ребре двугранного угла в  $60^\circ$ . Докажите, что объем части куба, находящейся внутри двугранного угла, имеет постоянную величину, и найдите этот объем.

8. Ребро куба равно  $a$ . Сфера с центром  $O$  пересекает три ребра, сходящиеся в вершине  $A$ , в их серединах. Из точки  $B$  пересечения сферы с одним из ребер куба опущен перпендикуляр на диагональ куба, проходящую через вершину  $A$ , причем угол между этим перпендикуляром и радиусом  $OB$  делится ребром куба пополам. Найдите радиус сферы.

9. В правильной треугольной пирамиде высота равна  $h$ , сторона основания равна  $a$ . Одна из вершин основания является центром сферы, касающейся противоположной грани пирамиды. Найдите площадь тех частей боковых граней пирамиды, которые расположены внутри сферы.

10. В тетраэдре  $ABCD$  ребра  $AB$  и  $CD$  взаимно перпендикулярны и равны  $a$  и  $b$  соответственно. Общий перпендикуляр к этим ребрам пересекает ребро  $AB$  в точке  $M$  и ребро  $CD$  в точке  $N$ ;  $MN = c$ . В тетраэдр вписан куб так, что четыре ребра куба параллельны  $MN$  и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найдите ребро куба.

При решении задач по стереометрии уже на самом первом шаге часто возникают трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картину. Если речь идет о геометрических телах, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни (куб, шар, цилиндр, параллелепипед и т.п.), то их легко себе представить. Как их рисовать, известно. Значительно труднее изобразить, например, скрещивающиеся прямые или совокупность прямых и плоскостей в пространстве. И не просто изобразить, а сделать чертеж, помогающий решению задачи.

Существует метод, позволяющий в ряде случаев преодолеть указанные трудности. Он основан на следующем соображении. Если пространственная конфигурация трудно воспринимается и не связана с конкретным геометрическим телом, то попробуем искусственно ее связать с каким-нибудь телом. Например, с кубом.

Изображенный на чертеже куб облегчает работу нашему воображению. На рисунке 1, например, отчетливо видно, что прямые  $l$  и  $m$  являются скрещивающимися. Убрали куб (рис. 2), и пространственная наглядность исчезла — мы видим пересекающиеся прямые  $l$  и  $m$  на плоскости.

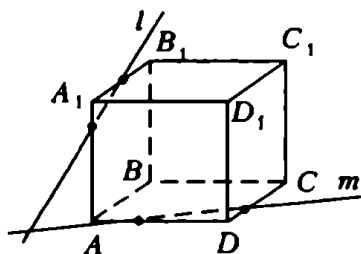


Рис. 1

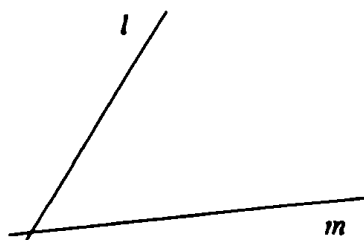


Рис. 2



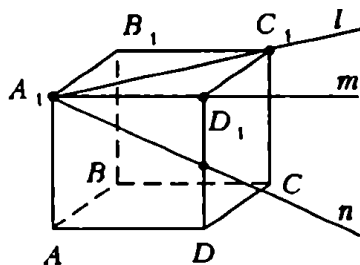


Рис. 3

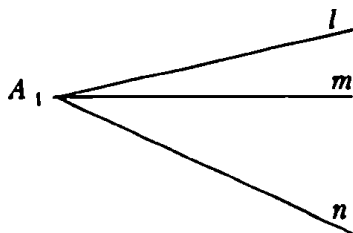


Рис. 4

Другой пример. Три луча  $l$ ,  $m$  и  $n$ , исходящие из одной точки  $A_1$ , нарисованы на кубе (рис. 3). Ясно, что они представляют собой ребра трехгранного угла. На рисунке 4 куба нет, поэтому картинка стала плоской. Чтобы увидеть на ней тот же трехгранный угол, мы должны заставить свое воображение потрудиться.

Использование вспомогательного куба не только «превращает» плоскую картину в объемную, но и указывает пути решения ряда задач. Продемонстрируем это на следующих примерах.

**Задача 1.** Плоские углы трехгранного угла равны  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$ . Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен  $45^\circ$ . Найдите угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.

**Решение.** Рассмотрим вспомогательный куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 5). Проведем диагонали  $AB_1$  и  $AC$  двух его смежных граней. Имеем  $\angle B_1 AB = 45^\circ$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $\angle B_1 AC = 60^\circ$  как угол правильного треугольника  $AB_1 C$ . Следовательно, трехгранный угол  $AB_1 C$  — это угол, о котором говорится в условии задачи. Ребро  $AA_1$  проходит через его вершину  $A$  и перпендикулярно грани  $BAC$ . Значит, требуется найти величину угла  $A_1 AB_1$ . Ответ очевиден:  $\angle A_1 AB_1 = 45^\circ$ .

Решение этой задачи без использования куба довольно сложно и существенно длиннее. Здесь нам вообще не пришлось считать: ответ удалось «прочитать» на кубе. Но такие случаи редки.

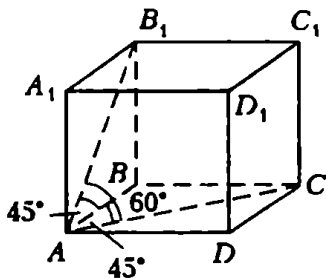


Рис. 5

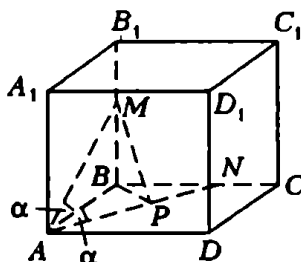


Рис. 6

**Задача 2.** Угол между двумя гранями трехгранного угла прямой, а величина каждого плоского угла этих граней равна  $\alpha$ . Найдите величину плоского угла третьей грани.

**Решение.** Сначала будем считать угол  $\alpha$  острым. Пусть вершина  $A$  вспомогательного куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  (рис. 6) является вершиной трехгранного угла, а отрезки  $AM$ ,  $AB$  и  $AN$  — его ребрами (если  $\alpha > 45^\circ$ , то точки  $M$  и  $N$  лежат на продолжениях ребер  $BB_1$  и  $BC$ ). Требуется найти угол  $MAN$ .

Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $MP$  на отрезок  $AN$  и соединим точки  $B$  и  $P$ . По теореме о трех перпендикулярах отрезок  $BP$  перпендикулярен отрезку  $AN$ . Из прямоугольных треугольников  $APB$  и  $ABM$  получаем

$$AP = AB \cdot \cos \alpha, \quad AM = AB / \cos \alpha.$$

Искомый угол  $MAN$  — острый угол прямоугольного треугольника  $APM$ ; поэтому

$$\cos \angle MAN = \frac{AP}{AM} = \frac{AB \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{AB} = \cos^2 \alpha,$$

$$\angle MAN = \arccos(\cos^2 \alpha).$$

Если  $\alpha = 90^\circ$ , то искомый угол прямой, что также может быть записано полученным соотношением.

Итак, ответ во всех случаях один:  $\arccos(\cos^2 \alpha)$ .

Мы видим, что на кубе удобно изображать трехгранные углы, две грани которых перпендикулярны. Это связано с тем, что куб содержит прямые двугранные углы. Но в кубе заложен и линейный размер — длина его ребра. Это дает возможность изображать на чертеже и величины расстояний.

**Задача 3.** Основание  $MN$  и вершина  $K$  равнобедренного треугольника  $MNK$  находятся на различных гранях прямого двугранного угла с ребром  $l$ . Точки  $M$  и  $K$  удалены от  $l$  на расстояние  $a$ , а проекция точки  $N$  на ребро  $l$  равноудалена от проекций точек  $M$  и  $K$  на ребро  $l$ . Найдите расстояние от точки  $N$  до  $l$ , если  $MK$  образует с  $l$  угол, равный  $60^\circ$ .

**Решение.** Пусть длина ребра вспомогательного куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  равна  $a$  и двугранный угол из условия задачи

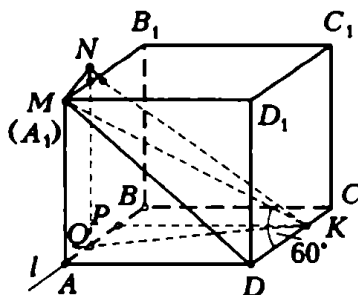


Рис.7

образован гранями  $AA_1B_1B$  и  $ABCD$  (рис. 7). Тогда точка  $M$  лежит на ребре  $A_1B_1$ , а точка  $K$  — на ребре  $CD$  (или на их продолжениях). Совместим точку  $M$  с вершиной куба  $A_1$ . Пусть точка  $K$  находится на ребре  $CD$  (она может находиться на продолжении ребра  $CD$  за вершину  $D$ , что не меняет наших рассуждений).

Опустим перпендикуляр  $KP$  на ребро  $AB$  и отметим середину  $Q$  отрезка  $AP$ . В плоскости грани  $AMB_1B$  восставим из точки  $Q$  перпендикуляр к ребру  $AB$ . Вершина  $N$  треугольника  $MNK$  лежит на этом перпендикуляре, так как ее проекция  $Q$  равноудалена от проекций точек  $M$  и  $K$ . Заметим, что точка  $N$  расположена выше ребра  $MB_1$ ; в противном случае треугольник  $MNK$  не будет равнобедренным.

Проведем отрезки  $MD$  и  $KQ$ .  $MD = a\sqrt{2}$  как диагональ квадрата со стороной  $a$ . По условию угол между скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $MK$  равен  $60^\circ$ . Но прямая  $CD$  параллельна прямой  $AB$ , следовательно,  $\angle MKD = 60^\circ$ . Из прямоугольного треугольника  $MKD$  находим

$$MK = \frac{MD}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad DK = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

По условию  $NK = MK$  и  $AP = DK$ . Тогда  $QP = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}DK = a/\sqrt{6}$ . Из прямоугольного треугольника  $QPK$  находим  $QK^2 = QP^2 + KP^2 = 7a^2/6$ . Наконец, из прямоугольного треугольника  $NQK$  получаем

$$NQ = \sqrt{NK^2 - QK^2} = \sqrt{MK^2 - QK^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}.$$

Задача решена.

**Задача 4.** В треугольнике  $LMN$  дано:  $\angle LNM = 90^\circ$ ,  $\angle MLN = 30^\circ$ . На перпендикуляре к отрезку  $LN$ , проходящем в пространстве через точку  $L$ , взята такая точка  $F$ , что  $LF = MN$ . Полуплоскости, которым принадлежат треугольники  $LMN$  и  $LNF$ , образуют двугранный угол, равный  $60^\circ$ . Найдите острый угол между прямыми  $LM$  и  $NF$ .

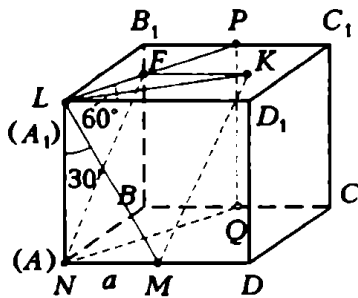


Рис. 8

**Решение.** Разместим треугольник  $LMN$  на грани вспомогательного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , так, как показано на рисунке 8, т.е. точку  $L$

совместим с вершиной  $A_1$ , а точку  $N$  — с вершиной  $A$ . Пусть  $MN = a$ . Проведем в верхней и нижней гранях куба соответственно отрезки  $LP$  и  $NQ$  так, что  $\angle PLD_1 = \angle QND = 60^\circ$ . Двугранный угол, образованный плоскостями  $LND_1D$  и  $LNPQ$ , равен  $60^\circ$ . На отрезке  $LP$  возьмем такую точку  $F$ , чтобы  $LF = MN = a$ . Соединим точки  $N$  и  $F$ . Наш чертеж полностью соответствует условию задачи.

Найдем угол между прямыми  $LM$  и  $NF$ . Через точку  $F$  проведем отрезок  $FK$ , параллельный ребру  $LD_1$  и равный по длине  $a$ . Точку  $K$  соединим с точками  $M$  и  $L$ . Угол  $LMK$  искомый, так как прямая  $MK$  параллельна прямой  $NF$  (четыреугольник  $NFKM$  — параллелограмм). Из прямоугольного треугольника  $LNM$  находим  $LM = 2a$ . Треугольники  $LMN$  и  $NLF$  равны (по двум катетам), поэтому  $NF = LM = 2a$ . Значит, и  $KM = 2a$ . В треугольнике  $LFK$  имеем  $LF = FK = a$ ,  $\angle LFK = 120^\circ$ . Отсюда  $LK = a\sqrt{3}$ . Из треугольника  $LMK$  находим

$$\cos \angle LMK = \frac{LM^2 + KM^2 - LK^2}{2LM \cdot KM} = \frac{8a^2 - 3a^2}{2 \cdot 4a^2} = \frac{5}{8},$$

т.е.  $\angle LMK = \arccos \frac{5}{8}$ .

**Задача 5.** Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен  $60^\circ$ . Точка  $M$  лежит на одной прямой, а точка  $N$  — на другой, причем расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми. Какие значения может принимать острый угол между общим перпендикуляром и прямой  $MN$ ?

**Решение.** Пусть одна из скрещивающихся прямых проходит через вершины  $A$  и  $D$  вспомогательного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Вторую прямую проведем через вершину  $A_1$  под углом  $60^\circ$  к ребру  $A_1 D_1$  в плоскости грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 9). Тогда ребро  $AA_1$  есть общий перпендикуляр к данным прямым. Расстояние между прямыми равно длине ребра куба  $a$ , значит, точки  $M$  и  $N$  удалены от отрезка  $AA_1$  на расстояние  $a$ . Совместим точку  $M$  с вершиной  $D$ . Возможны два варианта расположения точки  $N$ .

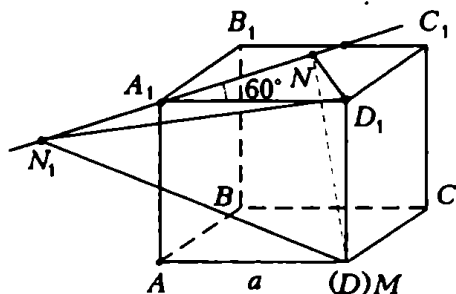


Рис. 9

1. Точка  $N$  лежит внутри грани  $A_1B_1C_1D_1$ .

Проведем отрезки  $ND_1$  и  $MN$ . Треугольник  $A_1ND_1$  равносторонний, следовательно,  $ND_1 = a$ . Искомый угол между прямыми  $MN$  и  $AA_1$  равен углу  $NMD_1$ , так как прямая  $AA_1$  параллельна  $MD_1$ . В треугольнике  $ND_1M$

$$ND_1 = MD_1 = a, \angle MD_1N = 90^\circ.$$

Значит,  $\angle NMD_1 = 45^\circ$ .

2. Точка  $N$  лежит вне грани  $A_1B_1C_1D_1$  (на рисунке 9 точка  $N_1$ ).

Проведем отрезки  $N_1D_1$  и  $MN_1$ . Треугольник  $N_1A_1D_1$  равнобедренный с углом  $120^\circ$  при вершине и боковыми сторонами, равными  $a$ . Следовательно,  $N_1D_1 = a\sqrt{3}$ . Искомый угол между прямыми  $AA_1$  и  $MN_1$  равен углу  $N_1MD_1$ . Из треугольника  $N_1D_1M$  находим  $\angle N_1MD_1 = 60^\circ$ .

Мы видим, что введение вспомогательного куба существенно упрощает решение. В следующей задаче, как и в задаче 1, мы благодаря кубу найдем нужный угол без вычислений.

**Задача 6.** Основанием пирамиды  $HPQR$  является равнобедренный прямоугольный треугольник  $PQR$ , длина гипотенузы  $PQ$  которого равна  $2\sqrt{2}$ . Боковое ребро пирамиды  $HR$  перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 1. Найдите величину угла и расстояние между

скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку  $H$  и середину ребра  $PR$ , а другая — через точку  $R$  и середину ребра  $PQ$ .

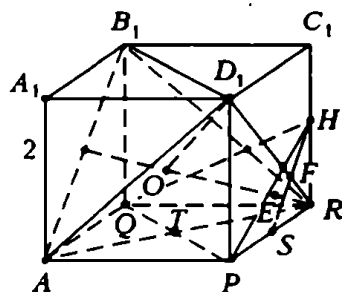


Рис. 10

**Решение.** Пусть длина ребра вспомогательного куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  равна 2. Тогда диагональ каждой его грани равна  $2\sqrt{2}$ . Поместим пирамиду  $HPQR$  внутрь куба так, чтобы точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  совпали соответственно с точками  $D$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 10). Точка  $H$  совпадает с серединой ребра  $RC_1$ .

Соединим точку  $H$  с серединой  $S$  ребра  $PR$ . Проведем диагональ  $RA$  нижней грани куба. Точка  $T$  пересечения диагоналей  $RA$  и  $PQ$  — середина отрезка  $PQ$ . Требуется найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми  $HS$  и  $RT$ .

Проведем диагонали  $C_1P$ ,  $B_1A$  и  $B_1R$  боковых граней куба. Очевидно, что отрезок  $HS$  параллелен отрезку  $B_1A$ . Поэтому искомый угол — это угол  $B_1AR$ , который равен  $60^\circ$  (треугольник  $B_1AR$  равносторонний).

Проведем диагонали  $C_1P$ ,  $B_1A$  и  $B_1R$  боковых граней куба. Очевидно, что отрезок  $HS$  параллелен отрезку  $B_1A$ . Поэтому искомый угол — это угол  $B_1AR$ , который равен  $60^\circ$  (треугольник  $B_1AR$  равносторонний).

Заметим теперь, что плоскость треугольника  $B_1AR$  содержит отрезок  $RT$  и параллельна отрезку  $HS$ . Поэтому искомое расстояние равно расстоянию между прямой  $HS$  и плоскостью  $B_1AR$ .

Рассмотрим правильный тетраэдр с основанием  $B_1AR$  и вершиной  $D_1$ . Пусть  $D_1O$  — высота тетраэдра. Из точки  $F$  пересечения отрезков  $D_1R$  и  $HS$  опустим перпендикуляр  $FE$  на отрезок  $RO$ . Отрезок  $FE$  перпендикулярен плоскости  $B_1AR$ , ибо отрезок  $FE$  параллелен отрезку  $D_1O$ . Значит, искомое расстояние равно  $FE$ . Из подобия треугольников  $D_1OR$  и  $FER$

$$\frac{FE}{D_1O} = \frac{FR}{D_1R} = \frac{1}{4}.$$

Осталось найти высоту тетраэдра  $D_1O$ . В прямоугольном треугольнике  $D_1OR$  гипотенуза  $D_1R = 2\sqrt{2}$ , а катет  $RO$  составляет  $2/3$  высоты правильного треугольника  $B_1AR$  со стороной  $2\sqrt{2}$ , т.е.  $RO = 2\sqrt{6}/3$ . Тогда  $D_1O = \sqrt{D_1R^2 - RO^2} = 4\sqrt{3}/3$ . Наконец,

$$FE = \frac{1}{4} D_1O = \sqrt{3}/3.$$

### Упражнения

1. У трехгранного угла  $OABC$  угол между гранями  $OAB$  и  $OBC$  прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна  $\gamma$ . Найдите величину плоского угла  $AOC$ .

2. Вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  лежат на различных гранях двугранного угла величиной  $45^\circ$  с ребром  $l$ . Сторона  $AC$  перпендикулярна одной грани и пересекается с ней в своей середине. Проекция отрезка  $BC$  на другую грань параллельна ребру  $l$  и по длине равна расстоянию от точки  $C$  до  $l$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

3. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $AC$  вдвое короче катета  $BC$ . Через точку  $B$  проведена в пространстве прямая, перпендикулярная отрезку  $BC$ , и на этой прямой взята точка  $D$  так, что  $BD = AC$ . Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники  $BCD$  и  $ABC$ , равен  $45^\circ$ . Найдите острый угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

4. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен  $45^\circ$ . Точка  $M$  лежит на одной из них, а точка  $N$  — на другой. Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых вдвое больше расстояния от точки  $M$  до него и втрое меньше расстояния от точки  $N$  до него. Найдите угол между общим перпендикуляром и прямой  $MN$ .

5. Длина ребра правильного тетраэдра  $SABC$  равна 1.  $BD$  — высота треугольника  $ABC$ . Равносторонний треугольник  $BDE$  лежит в плоскости, образующей угол  $\varphi$  с ребром  $AC$ , причем точки  $S$  и  $E$  лежат по одну сторону от плоскости  $ABC$ . Найдите расстояние между точками  $S$  и  $E$ .

В этой статье обсуждаются задачи о комбинациях тел в пространстве, в которые входят один или несколько шаров. Указанную в задаче совокупность тел бывает трудно изобразить на чертеже, но это и не нужно: для решения достаточно построить плоские чертежи, получающиеся в сечении данной пространственной фигуры плоскостями или при проектировании ее на плоскости. При этом главное — правильно выбрать плоскости. Универсального способа для такого выбора не существует; нужно, конечно, стараться, чтобы секущие плоскости проходили через как можно большее количество узловых точек — центров шаров, точек касания и т.д., — а при проектированиих сохранялись (или изменялись контролируемым образом) данные длины и углы.

Напомним несколько простых геометрических фактов, которые часто используются при выборе плоскостей.

**Утверждение 1.** *Радиусы, проведенные в точку касания двух шаров, лежат на одной прямой. Расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме или разности их радиусов.*

**Утверждение 2.** *Если плоскость проходит через центры касающихся шаров, то она содержит точку касания.*

**Утверждение 3.** *Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Если плоскость проходит через ось цилиндра и центр шара, то она содержит точку касания.*

**Утверждение 4.** *Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового конуса. Если плоскость проходит через высоту конуса и центр шара, то она содержит точку касания.*

В качестве примеров разберем несколько задач, предлагавшихся в разное время на вступительных экзаменах в МГУ.

**Задача 1.** *В пространство, заключенное между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара с радиусами  $r$  так, что каждый*

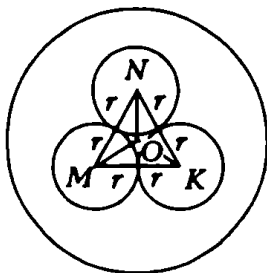


Рис.1

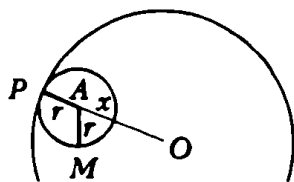


Рис.2

шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найдите радиус сферической поверхности.

**Решение.** Проекции центров данных шаров на данную плоскость являются вершинами правильного треугольника со стороной  $2r$ ; центр сферической поверхности лежит в центре этого треугольника; расстояние от этого центра до любой вершины треугольника равно  $2r/\sqrt{3}$  (рис.1).

Проведем плоскость через центр  $O$  сферической поверхности и центр  $A$  одного из данных шаров перпендикулярно к данной плоскости. В сечении получится фигура, изображенная на рисунке 2. На этом рисунке точка  $M$  — проекция точки  $A$  на данную плоскость,  $P$  — точка касания данного шара с центром  $A$  и данной сферической поверхности. В прямоугольном треугольнике  $AOM$  известны длины катетов:  $AM = r$ ,  $MO = 2r/\sqrt{3}$ .

Следовательно,  $AO = \sqrt{r^2 + \frac{4r^2}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}r$  и мы можем найти нужный радиус:

$$OP = OA + AP = \frac{\sqrt{21}}{3}r + r = \frac{3 + \sqrt{21}}{3}r.$$

**Задача 2.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  равна 2, сторона  $BC$  равна 4 и  $\angle B = 60^\circ$ . Три шара касаются плоскости треугольника  $ABC$  соответственно в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и попарно касаются между собой. Определите радиусы этих шаров.

**Решение.** По теореме косинусов находим длину стороны  $AC$ : она равна  $\sqrt{12}$ . Пусть шары, касающиеся плоскости треугольника в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , имеют своими центрами точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , а их радиусы равны  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Проведем три вспомогательные секущие плоскости, перпендикулярные к плоскости треугольника  $ABC$ : одну через точки  $O_1$  и  $O_2$  (сечение этой плоскостью нашей фигуры изображено на рисунке 3), другую через точки  $O_2$  и  $O_3$  и третью через точки  $O_1$  и  $O_3$  (сечения этими плоскостями устроены аналогично). В каждом сечении лежит прямоугольный



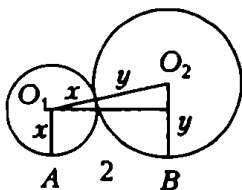


Рис.3

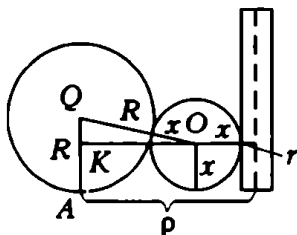


Рис.4

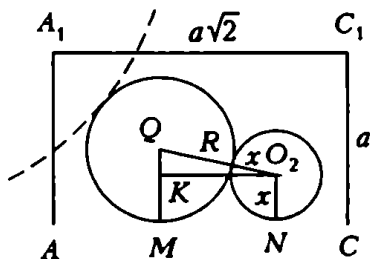


Рис.5

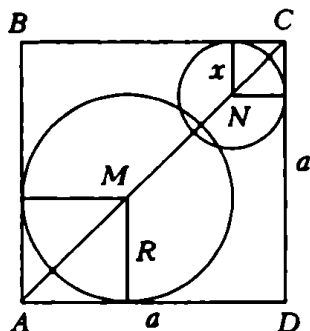


Рис.6

треугольник, у которого длина гипотенузы равна сумме радиусов двух шаров, один катет равен разности этих радиусов, а другой катет равен длине соответствующей стороны треугольника  $ABC$ . Записав теорему Пифагора для каждого из этих треугольников, мы получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, из которой находим  $x = \sqrt{3}/2$ ,  $y = 2\sqrt{3}/3$ ,  $z = 2\sqrt{3}$ .

**Задача 3.** На плоскости лежит шар с радиусом  $R$ . Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиусом  $r$ , причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние  $\rho > R + r$ . Найдите минимально возможный радиус шара, который касался бы одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

**Решение.** Проведем вспомогательную плоскость через ось цилиндра и центр  $Q$  заданного шара. Центр  $O$  шара, радиус которого мы ищем, лежит, очевидно, в этой плоскости. В сечении (рис.4) расположен прямоугольный треугольник  $OKQ$ , в котором длины всех сторон выражаются через данные задачи  $R$ ,  $r$ ,  $\rho$  и искомый радиус  $x$ . Теорема Пифагора дает уравнение для вычисления  $x$ ; решая это уравнение, получаем  $x = (\sqrt{R + \rho - r} - \sqrt{R})^2$ .

**Задача 4.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ). В угол  $A$  куба вписан шар с радиусом  $R = 0,5$ . Найдите радиус шара, вписанного в угол  $C$  куба и касающегося данного шара, при условии, что ребро куба  $a = 1,5$ .

**Решение.** Пусть  $Q$  — центр шара, вписанного в угол  $A$ . Существуют три шара, вписанных в угол  $C$  и касающихся заданного шара. Один из них касается основания куба  $ABCD$  в той же точке, что заданный шар, и содержит его внутри себя. Центр этого шара обозначим через  $O_1$ . Точка  $O_1$  находится над точкой  $Q$ . Еще два шара, радиусы которых мы должны найти, касаются шара  $Q$  внешним образом и расположены по разные стороны от него: меньший ближе к вершине  $C$ , больший дальше от нее. Обозначим их центры буквами  $O_2$  и  $O_3$  соответственно.

(Заметим, что только самый маленький шар  $O_2$  помещается внутри куба. Средний шар  $O_1$  и большой шар  $O_3$  «вылезают» за его пределы и могут касаться не граней куба, а их продолжений.)

Найдем радиусы этих трех шаров. Проведем вспомогательную плоскость через вертикальные ребра  $AA_1$  и  $CC_1$ . В этой плоскости лежат центры всех шаров, точки касания их между собой и с плоскостью  $ABCD$ . Рассмотрим сечение этой плоскостью шаров  $O_2$  и  $Q$  (рис.5). В треугольнике  $O_2 K Q$  не известна только длина катета  $KO_2$ . Но  $KO_2 = MN$ , а расстояние между точками  $M$  и  $N$  мы находим из проекции на плоскость основания  $ABCD$  (рис.6);

$$MN = AC - AM - NC = a\sqrt{2} - R\sqrt{2} - x\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - R - x).$$

Воспользовавшись теоремой Пифагора для треугольника  $O_2 K Q$ , мы получим уравнение

$$(R + x)^2 = (R - x)^2 + 2(a - R - x)^2,$$

которое имеет два корня (напомним, что по условию  $R = 0,5$ ,  $a = 1,5$ ):  $(3 - \sqrt{5})/2$  и  $(3 + \sqrt{5})/2$ .

Что означает наличие двух корней? Нарисуйте сечение и проекцию для шаров  $O_3$  и  $Q$ , аналогичные показанным на рисунках 5 и 6. Убедитесь в том, что радиус большого шара  $O_3$  находится из уравнения, которое отличается от написанного только знаками внутри скобок в правой части. Эта разница уничтожается при возведении в квадрат. Значит, полученные два корня — это длины радиусов шаров  $O_2$  и  $O_3$  соответственно.

Для вычисления радиуса шара  $O_1$  достаточно рассмотреть проекцию на плоскость основания  $ABCD$ , показанную на рисунке 7. Искомый радиус равен длине катета равнобедренного

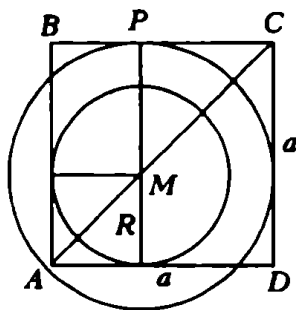


Рис.7

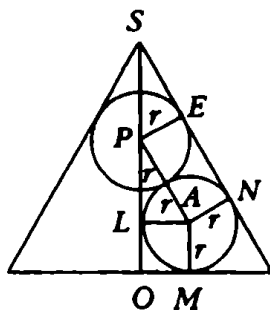


Рис.8

прямоугольного треугольника  $MPC$ , гипотенуза которого находится так:

$$MC = AC - AM = a\sqrt{2} - R\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - R) = \sqrt{2}.$$

Отсюда радиус шара  $O_1$  равен 1.

**Задача 5.** На основании прямого кругового цилиндра лежат три шара с радиусами  $r$ . На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найдите высоту конуса.

**Решение.** Введем следующие обозначения:  $S$  — вершина конуса;  $P$  — центр верхнего шара;  $A$  — центр одного из шаров, лежащих на основании конуса;  $M$  — точка касания этого шара с основанием. Проведем вспомогательную плоскость через высоту конуса  $SO$  и центр шара  $A$ . Сечение имеет вид, показанный на рисунке 8; буквами  $E$  и  $N$  обозначены точки касания шаров с боковой поверхностью конуса.

Будем искать высоту конуса  $SO$  как сумму длин отрезков  $SP$ ,  $PL$  и  $LO$ . Из прямоугольного треугольника  $PLA$

$$PL = \sqrt{PA^2 - LA^2} = \sqrt{PA^2 - OM^2},$$

а величину отрезка  $OM$  находим в точности так же, как в первой задаче, спроектировав шары на плоскость основания конуса (см. рис.1). Получим  $PL = 2r\sqrt{6}/3$ .

Из подобия треугольников  $SEP$  и  $PLA$

$$SP = PE \cdot PA/LA = r\sqrt{3}.$$

Так как  $LO = r$ , окончательно имеем

$$SO = r(\sqrt{3} + 2\sqrt{6}/3 + 1).$$

### Упражнения

1. В правильную треугольную пирамиду с ребром основания  $a$  и двугранным углом при основании, равным  $60^\circ$ , вложены три шара одинаковых радиусов так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды. Найдите радиус каждого шара.

2. Два шара касаются плоскости  $P$  в точках  $A$  и  $B$  и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 10. Третий шар касается внешним образом двух данных шаров, а его центр  $O$  лежит в плоскости  $P$ . Известно, что  $AO = BO = 2\sqrt{10}$ ,  $AB = 8$ . Определите радиус третьего шара.

3. На плоскости лежит прямой круговой цилиндр радиусом  $R$  и, не пересекаясь с ним, лежит шар радиусом  $r$ . Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно  $\rho$ . Найдите минимальный возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

4. Дан куб с основаниями  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ). В угол  $A$  куба вписан шар радиусом  $R = 0,5$ . Найдите радиус шара, вписанного в угол  $C_1$  куба и касающегося данного шара, если ребро куба  $a = 1,5$ .

5. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найдите объем конуса, если радиус каждого шара равен  $r$ .

6. В двугранный угол величиной  $60^\circ$  вписаны два шара радиусом  $R$ , касающиеся друг друга. Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося обоих данных шаров.

7. В прямом круговом конусе расположены два одинаковых шара с радиусами  $r$ , касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый шар касается боковой поверхности конуса и другого шара. Высота конуса в  $4/3$  раза больше радиуса основания. Найдите объем конуса.

На вступительных экзаменах в вузы часто предлагаются задачи, в которых фигурирует сфера, касающаяся всех ребер многогранника. Этой теме и посвящена настоящая статья.

Пусть сфера касается всех ребер некоторого многогранника. Тогда справедливы следующие утверждения (докажите их самостоятельно):

(1) каждая грань многогранника пересекает поверхность сферы по окружности, касающейся ребер многогранника, т.е. по окружности, вписанной в грань; тем самым гранями многогранника будут такие многоугольники, в которые можно вписать окружность;

(2) основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на любую грань многогранника, является центром окружности, вписанной в эту грань;

(3) перпендикуляры, восстановленные к плоскостям граней в центрах вписанных окружностей, пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех ребер многогранника — в центре сферы;

(4) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра шара на ребро многогранника, равен радиусу сферы.

Теперь рассмотрим некоторые типы многогранников, для которых существует указанная сфера.

## СФЕРА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕБЕР ПРИЗМЫ

**Теорема 1.** *Сфера, касающаяся всех ребер призмы, существует тогда и только тогда, когда эта призма правильная и все ее ребра равны между собой.*

**Доказательство.** Пусть искомая сфера существует. Сначала докажем, что тогда призма — прямая. Проведем через центр сферы  $K$  высоту  $OO_1$  призмы:  $KO \perp ABC$ ,  $KO_1 \perp A_1B_1C_1$  (рис.1). По свойству (2) точки  $O$  и  $O_1$  являются центрами окружностей,

вписанных в равные основания призмы, следовательно,  $O_1M_1 = OM$  ( $OM \perp AB$ ,  $O_1M_1 \perp A_1B_1$ ) как радиусы равных окружностей. Точки  $O$ ,  $O_1$ ,  $M$  и  $M_1$  лежат в одной плоскости (проходящей через прямую  $OO_1$  и перпендикулярной к  $AB$  — докажите!), поэтому  $OO_1MM_1$  — прямоугольник и  $M_1M \perp ABC$  ( $M_1M \parallel O_1O$ ). Далее,  $\triangle O_1M_1B_1 = \triangle OMB$  (докажите!), поэтому  $M_1B_1 = MB$ , т.е.  $MM_1B_1B$  — прямоугольник,  $B_1B \parallel M_1M \perp ABC$ .

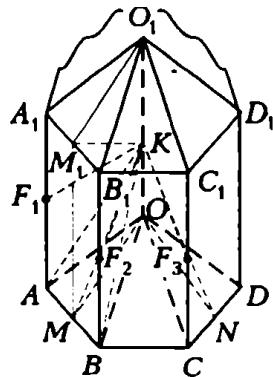


Рис. 1

Таким образом, боковые грани призмы являются прямоугольниками. Но по свойству (1) в эти грани можно вписать окружность, а если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат; следовательно, боковые грани призмы — квадраты. Отсюда  $AB = BB_1 = BC = \dots$ , т.е. в основании призмы лежит многоугольник с равными сторонами. Спроектируем призму со сферой на плоскость  $ABC$ ; призма спроектируется в многоугольник  $ABC\dots$ , а сфера — в окружность, описанную вокруг этого многоугольника. Но многоугольник с равными сторонами, вписанный в окружность, — правильный, поэтому и призма — правильная.

Теперь докажем, что для правильной призмы с равными ребрами указанная сфера существует. Для этого нужно показать, что существует точка, равноудаленная от всех ребер этой призмы. Такой точкой является середина  $K$  отрезка  $OO_1$ , соединяющего центры оснований (см. рис.1).

В самом деле, заметим, что отрезки  $KM$ ,  $KM_1$ ,  $KN$  (и т.п.) равны, как гипотенузы прямоугольных треугольников, один катет которых равен  $KO$ , а другой — апофеме правильного многоугольника  $ABC\dots$ , и равны перпендикулярам, опущенным из точки  $K$  на боковые ребра призмы:  $KF_1 = OA$ , в  $\triangle OAM$  имеем  $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}OO_1 = KO$ ,  $OM$  — апофема (аналогично рассматриваются остальные боковые ребра).

Таким образом, теорема доказана. Причем доказано даже, что радиус сферы, касающейся ребер такой призмы, равен радиусу окружности, описанной вокруг основания призмы. На этом утверждении базируется решение задач на сферу, касающуюся ребер призмы.

**Задача 1.** В  $n$ -угольную призму вписаны две сферы: одна касается всех ее граней, а другая — всех ее ребер. Какая это призма?

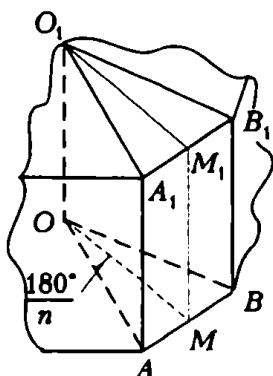


Рис.2

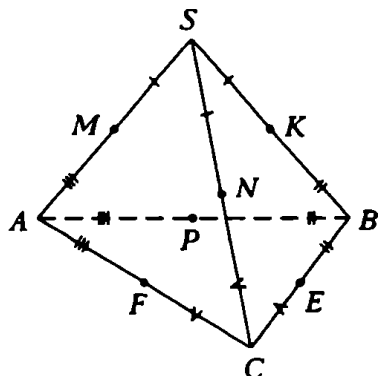


Рис.3

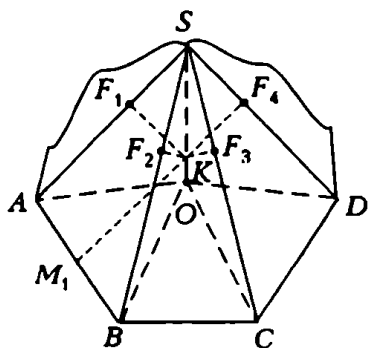


Рис.4

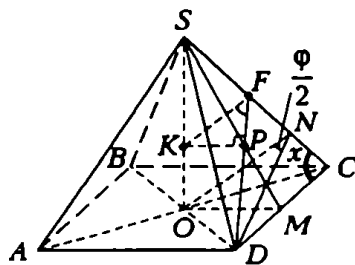


Рис.5

**Решение.** По теореме 1 эта призма — правильная. Далее, с одной стороны,  $MM_1 = OM + O_1M_1$  (рис.2), поскольку в данную призму можно вписать сферу; с другой стороны,  $MM_1 = AB$ , поскольку существует сфера, касающийся всех ребер призмы. Отсюда  $OM + O_1M_1 = AB$ ,  $2OM = AB$ . Но  $OM = \frac{AB}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$ , поэтому  $\operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} = 1$ ,  $n = 4$ . Следовательно, призма представляет собой куб.

### СФЕРА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕБЕР ПИРАМИДЫ

**Задача 2.** Сфера касается всех ребер тетраэдра. Докажите, что суммы противоположных ребер этого тетраэдра равны.

**Решение.** Пусть сфера касается ребер тетраэдра  $SABC$  (рис.3) в точках  $M, N, K, F, P, E$ . Касательные, проведенные из одной точки к данной сфере, равны, поэтому

$$SM = SN = SK, \quad (1)$$

$$AM = AP = AF, \quad (2)$$

$$BP = BK = BE, \quad (3)$$

$$CN = CF = CE. \quad (4)$$

В каждую из сумм  $AS + BC$ ,  $AC + BS$ ,  $AB + CS$  входит ровно по одному отрезку из групп (1) – (4), следовательно, эти суммы равны.

**Теорема 2.** Если центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды, лежит на ее высоте, то такая пирамида – правильная.

**Доказательство.** Пусть центр  $K$  сферы лежит на высоте  $SO$  (рис.4). Прямоугольные треугольники  $SKF_1$ ,  $SKF_2$  (и т.д.) имеют общую гипотенузу  $SK$  и равные катеты:  $KF_1 = KF_2$  (радиусы сферы), поэтому они равны. Отсюда  $\angle F_1SK = \angle F_2SK$ .

Прямоугольные треугольники  $ASO$ ,  $BSO$  (и т.д.) имеют общий катет  $SO$  и равные острые углы при вершине  $S$ , поэтому они равны и  $OA = OB (= OC = \dots)$ . Следовательно,  $O$  – центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

По свойству (2) точка  $O$  является также центром окружности, вписанной в основание пирамиды. А если описанная вокруг многоугольника и вписанная в многоугольник окружности являются концентрическими, то этот многоугольник – правильный (докажите!). Следовательно, исходная пирамида – правильная, теорема доказана.

При решении задач на сферу, касающуюся ребер правильной пирамиды, полезно использовать подобие прямоугольных треугольников  $KSF_1$  и  $ASO$  ( $\angle ASK$  общий,  $\angle SKF_1 = \angle SAO$ ).

**Задача 3.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна  $a$ , двугранный угол при боковом ребре равен  $\varphi$ . Определите радиус сферы, касающейся всех ребер этой пирамиды.

**Решение.** Легко доказать, что искомая сфера существует; обозначим ее центр через  $K$ . Пусть  $\angle SDC = \angle SCD = x$  (рис.5). Проведем  $KF \perp SC$  и  $KP \perp SCD$ . Соединим точки  $F$  и  $P$ . Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что  $FP \perp SC$ , и поскольку пирамида правильная,  $\angle KFP$  равен половине линейного угла двугранного угла при боковом ребре пирамиды, т.е.  $\varphi/2$ . Заметим, что  $KF$  – радиус сферы, касающейся ребер пирамиды, а  $P$  – центр окружности, вписанной в боковую грань  $SDC$ , поэтому  $PD$  – биссектриса  $\angle SDC$ ,  $\angle PDM = x/2$ ,  $PM = PF$ . Из  $\triangle PDM$  и  $\triangle KPF$  находим:  $PM = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,  $KF = PF / \cos \frac{\varphi}{2} = a \operatorname{tg} \frac{x}{2} / 2 \cos \frac{\varphi}{2}$ .



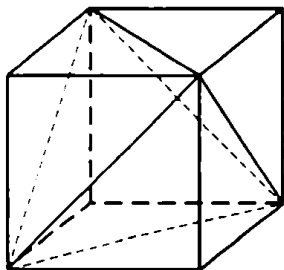


Рис. 6

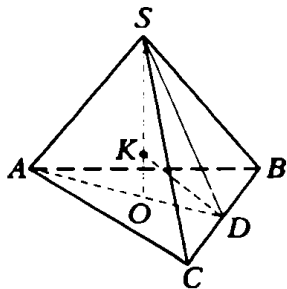


Рис. 7

Теперь найдем связь между углами  $\varphi$  и  $x$ . Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники  $OND$  и  $DNC$ :  $DN = OD / \sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $DN = DC \cdot \sin x$ . Отсюда  $OD = DC \cdot \sin x \sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $\sin x = \sqrt{2} / \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right)$ . Находя теперь  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  (с учетом неравенства  $0 < x < \pi/2$ ), получаем ответ

$$KF = a / \left( \sqrt{2} \sin \varphi + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{-\cos \varphi} \right).$$

**Задача 4.** Найдите объем части правильного тетраэдра с ребром  $a$ , заключенной между двумя сферами: одна сфера касается всех граней тетраэдра, другая — всех ребер.

**Решение.** Обозначим искомый объем через  $v$ , тогда  $v = v_1 - 4v_2 - v_3$ , где  $v_1$  — объем сферы радиусом  $R$ , касающейся всех ребер тетраэдра,  $v_2$  — объем шарового сегмента, отсекаемого одной гранью тетраэдра от этой сферы,  $v_3$  — объем сферы радиусом  $r$ , вписанной в тетраэдр.

Заметим, что если сфера вписана в куб, то она касается всех ребер правильного тетраэдра, образованного диагоналями граней куба (рис. 6). Если диагональ грани куба равна  $a$ , то его ребро равно  $a/\sqrt{2}$ , а радиус сферы, вписанной в куб, равен половине этого ребра,  $R = a/2\sqrt{2} = a\sqrt{2}/4$ .

Теперь из  $\triangle OKD$  (рис. 7) находим радиус  $r$  сферы, вписанной в тетраэдр:  $OK = r = \sqrt{KD^2 - OD^2} = a\sqrt{6}/12$ , и высоту сегмента:  $h = R - r = a\sqrt{2}/4 - a\sqrt{6}/12 = a(3\sqrt{2} - \sqrt{6})/12$ .

Подставив найденные значения  $R$ ,  $r$  и  $h$  в выражение

$$v = \frac{4}{3} \pi R^3 - 4\pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right) - \frac{4}{3} \pi r^3$$

и упрощая, получаем:  $v = \frac{1}{216} \pi a^3 (7\sqrt{6} - 9\sqrt{2})$ .

# **СФЕРА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕБЕР ПРАВИЛЬНОЙ УСЕЧЕННОЙ ПИРАМИДЫ**

Если сфера касается всех ребер правильной усеченной пирамиды, то, как следует из утверждений (1) – (4), центр этой сферы лежит на высоте пирамиды, соединяющей центры  $O$ ,  $O_1$  оснований, и сфера касается ребер оснований пирамиды в их серединах  $M$ ,  $M_1$ , ... (рис.8), причем  $OO_1M_1M$  – трапеция,  $OO_1 \perp OM$ , и перпендикуляр, опущенный из центра  $K$  сферы на боковую грань, попадает в точку  $P$  – середину апофемы  $MM_1$ . Это построение и теорема 2 (применимая и к усеченной пирамиде) лежат в основе решения задач на сферу, касающуюся всех ребер усеченной пирамиды.

**Задача 5.** В правильную  $n$ -угольную усеченную пирамиду вписана сфера; известно также, что существует сфера, касающаяся всех ребер этой пирамиды. Найдите  $n$ .

**Решение.** Рассматривая трапецию  $OO_1M_1M$  (см. рис.8) и треугольники  $MOB$  и  $M_1O_1B_1$ , находим:  $MM_1 = MO + M_1O_1$  (как отрезки двух касательных к сфере, вписанной в пирамиду),  $BB_1 = BM + B_1M_1$  (как отрезки двух касательных к сфере, касающейся ребер пирамиды),  $MO = BM \operatorname{ctg}(180^\circ/n)$ ,  $M_1O_1 = B_1M_1 \operatorname{ctg}(180^\circ/n)$ . Но  $MM_1 < BB_1$  (почему?), отсюда  $\operatorname{ctg}(180^\circ/n) < 1$ ,  $180^\circ/n > 180^\circ/4$ ,  $n < 4$ . Следовательно,  $n = 3$ .

**Задача 6.** На каком расстоянии от боковой грани находится центр сферы, касающейся всех ребер правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если стороны оснований соответственно равны 4 и 2?

**Решение.** Рассмотрим трапецию  $OO_1M_1M$  (рис.9), в ней  $OM = 2$ ,  $O_1M_1 = 1$ ,  $KM = KM_1$  как радиусы сферы, касающейся ребер усеченной пирамиды. Как и в предыдущей задаче,  $CC_1 = CM + C_1M_1 = (CD + C_1D_1)/2 = 3$ . Теперь найдем высоту трапеции  $CC_1D_1D$ :  

$$M_1M = C_1E = \sqrt{CC_1^2 - (CM - C_1M_1)^2}$$

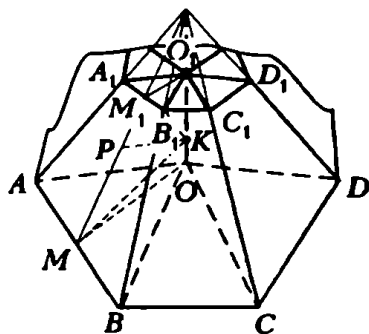


Рис.8

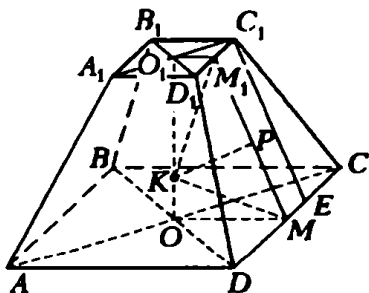


Рис.9

$$= \sqrt{8} \text{ и высоту трапеции } OO_1M_1M : OO_1 = M_1N = \\ = \sqrt{M_1M^2 - (MO - M_1O_1)^2} = \sqrt{7}.$$

Обозначим  $OK$  через  $x$ , тогда  $O_1K = \sqrt{7} - x$ ,  $KM_1 = \sqrt{O_1K^2 + O_1M_1^2} = \sqrt{(\sqrt{7} - x)^2 + 1^2}$ ,  $KM = \sqrt{x^2 + 2^2}$ . Но  $KM_1 = KM$ , получается уравнение относительно  $x$ ; решая его, находим  $x = 2/\sqrt{7}$ . Осталось найти  $KM = \sqrt{4/7 + 4} = \sqrt{32/7}$  и  $KP = \sqrt{KM^2 - PM^2} = 3\sqrt{14}/7$ .

### Упражнения

1. Сфера касается всех ребер куба. Найдите площадь поверхности сферы, лежащей внутри куба, если ребро куба равно 1.

2. Сфера касается всех ребер куба. Найдите объем общей части сферы и куба, если ребро куба имеет длину  $a$ .

3. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный  $45^\circ$ . Где находится центр сферы, касающейся всех ребер?

4. Сфера радиусом  $R$  касается каждого ребра правильного тетраэдра. Найдите объем их общей части.

5. Сфера радиусом  $r$  касается всех ребер треугольной пирамиды. Центр сферы лежит внутри пирамиды на ее высоте на расстоянии  $r\sqrt{3}$  от вершины. Докажите, что пирамида правильная. Найдите высоту пирамиды.

6. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $a$ , боковое ребро пирамиды равно  $b$ . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

7. Боковое ребро правильной  $n$ -угольной пирамиды образует с плоскостью основания угол  $\alpha$ . На каком расстоянии от плоскости основания находится центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды, если сторона ее основания равна  $a$ ?

Каждый, кто готовится к письменному экзамену по математике и изучает в связи с этим варианты МГУ прошлых лет, обратит внимание на то, что, как правило, каждый вариант довольно резко разделяется на две части: на три-четыре относительно легкие задачи и одну-две значительно более трудные. В «трудные» входит либо нестандартная алгебраическая (или тригонометрическая) задача, либо задача по стереометрии.

Чтобы рассчитывать на успешную сдачу письменного экзамена, надо уделить достаточно большое внимание решению нестандартных задач. О нестандартных задачах по стереометрии, отобранных из вариантов МГУ, и пойдет речь в настоящей статье.

Прежде всего подчеркнем важность построения удачного чертежа. При построении надо помнить, что проекция нарушает многие соотношения между элементами пространственной фигуры. Необходимо все время «держать в уме» истинные углы и длины. Не надо загромождать чертеж трудно изображаемыми деталями. Например, как правило, нет необходимости на чертеже изображать шары или биссекторные плоскости. С другой стороны, удачное дополнительное построение может не только прояснить структуру пространственной конфигурации, но и дать хорошую идею решения задачи. Очень полезно важные плоские элементы данной стереометрической фигуры, например, грани, сечения или проекции, изображать на отдельном чертеже.

**Задача 1.** *В треугольной пирамиде  $SABC$  суммы трех плоских углов при каждой из вершин  $B$  и  $C$  равны  $180^\circ$  и  $SA=BC$ . Найдите объем пирамиды, если площадь грани  $SBC$  равна 100, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания равно 3.*

**Решение.** Первое условие задачи является наиболее «неудобным» для использования. Чтобы сделать его более нагляд-

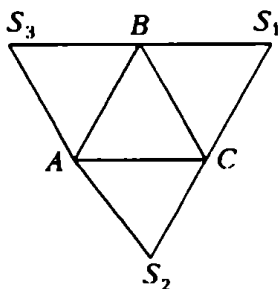


Рис. 1

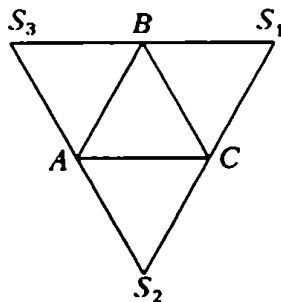


Рис. 2

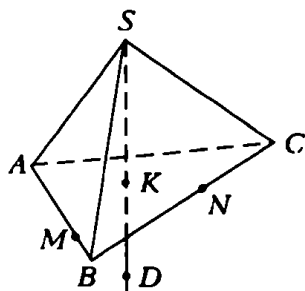


Рис. 3

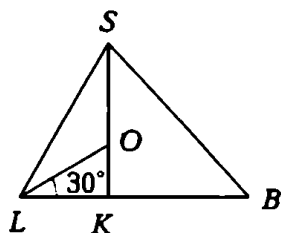
ным, рассмотрим развертку  $S_1S_2S_3ABC$  пирамиды  $SABC$  (рис. 1). Из первого условия следует, что точки  $S_1, B, S_3$  лежат на одной прямой, как и точки  $S_1, C, S_2$ . Так как  $BC$  есть средняя линия в треугольнике  $S_1S_2S_3$ ,  $S_2S_3 = 2BC$ . С другой стороны, по условию задачи,  $AS_3 = AS_2 = BC$ . Таким образом, треугольник  $AS_2S_3$  оказался вырожденным и правильной разверткой будет развертка, изображенная на

рисунке 2. Отсюда немедленно следует, что все грани являются равными треугольниками. Значит (докажите!), расстояния от центра описанного шара до всех граней равны. Если мы соединим центр описанного шара со всеми вершинами, то наша пирамида разобьется на четыре равновеликие пирамиды, объем каждой из которых равен  $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 100 = 100$ . Поэтому объем исходной пирамиды равен 400.

**Задача 2.** В правильную треугольную пирамиду  $SABC$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABC$  вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен  $60^\circ$ . Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания  $AB$  и  $BC$  в некоторых точках  $M$  и  $N$  таких, что  $MN = 5$ , касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек  $M$  и  $N$ , и пересекающая продолжение высоты пирамиды  $SK$  за точку  $K$  в некоторой точке  $D$ . Найдите длину отрезка  $SD$ .

**Решение** (рис. 3). Заметим сразу, что исходные данные полностью определяют нашу пирамиду. Вычислим, например, длину стороны основания. Рассмотрим для этого сечение, проходящее через высоту пирамиды  $SK$  и боковое ребро  $SB$ . (Такое сечение часто используется в решении задач на правильную

а



б

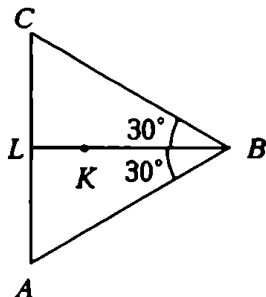
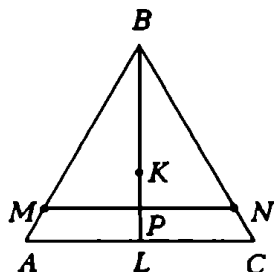


Рис.4

а



б

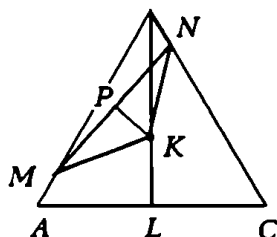


Рис.5

пирамиду.) Это сечение пересекает грань  $ASC$  по апофеме  $SL$  (рис. 4,а): точка  $O$  на нем — центр вписанного шара. Поскольку  $LK = \sqrt{3}$ , сторона основания равна 6 (рис. 4,б). Аналогично вычисляем  $SK = 3$ .

Покажем теперь, что точки  $M$  и  $N$  однозначно определяются условиями задачи. Так как плоскость основания тоже касается шара, из условий задачи следует, что  $MK = KN$  (докажите!). Пусть  $AM = x$ . Тогда априори либо  $CN = x$ , либо  $BN = x$  (докажите!).

Рассмотрим *первый случай* (рис. 5,а). Так как прямая  $MN$  параллельна основанию  $AC$ ,  $MB/AB = MN/AC = 5/6$ , откуда  $x = 1$ . Заметим, в частности, что  $PK = KL - PL = \sqrt{3}/2 < 1$ . Следовательно, плоскость, проходящая через  $MN$  и касающаяся шара, пересекает продолжение  $SK$  за точку  $K$ .

Переходя ко *второму случаю* (рис. 5,б), вычислим по теореме косинусов для треугольника  $MBN$  величину  $x$ . Получим  $x = (9 - 4\sqrt{3})/3$ . (Прodelайте вычисления самостоятельно и обоснуйте, почему достаточно ограничиться этим значением для  $x$ .) Определим теперь расстояние от точки  $K$  до отрезка  $MN$ . Для этого вычислим площадь треугольника  $MKN$ :

$$S_{MKN} = S_{MBK} + S_{KBN} - S_{MBN} =$$

$$= \frac{1}{2}(6-x)2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}(6-x)x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{12}.$$

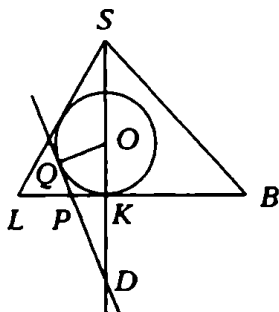


Рис.6

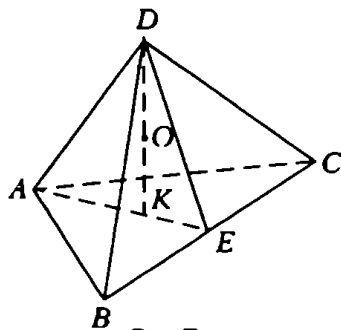


Рис.7

Следовательно,

$$KP = \left( 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{12} \right) : 5 = \frac{5\sqrt{3}}{6} > 1.$$

Значит, плоскость, проходящая через  $MN$  и касающаяся шара, пересечет  $SK$  «выше» точки  $K$ , что противоречит условию задачи. Таким образом, второй случай невозможен. Существование и единственность искомой плоскости доказаны.

Перейдем к вычислению длины отрезка  $SD$ . На рисунке 6 снова изображено то же сечение, что и на рисунке 4,а. Из подобия треугольников  $PKD$  и  $QOD$  легко находим  $KD = 6$ . Отсюда  $SD = KD + SK = 9$ .

**Задача 3.** Дана треугольная пирамида  $ABCD$ . Скрещивающиеся ребра  $AC$  и  $BD$  и  $AD$  и  $BC$  этой пирамиды перпендикулярны, ребра  $AB$  и  $CD$  равны, все ребра пирамиды касаются шара с радиусом  $r$ . Найдите площадь грани  $ABC$ .

**Решение.** Проведем через ребро  $AD$  плоскость, перпендикулярную ребру  $BC$  (рис. 7). Очевидно (почему?), эта плоскость содержит высоту пирамиды, причем  $DE \perp BC$ .

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 = BD^2 - DE^2;$$

$$EC^2 = AC^2 - AE^2 = CD^2 - DE^2.$$

Отсюда

$$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2. \quad (1)$$

Аналогично

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2. \quad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что суммы длин противоположных сторон пространственного четырехугольника, все стороны которого касаются шара, равны. (Докажите этот аналог известного свойства описанного четырехугольника самостоятельно.)

Применяя это утверждение к пространственному четырехугольнику  $ABCD$  со сторонами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , получим

$$AB + CD = BC + AD. \quad (3)$$

С другой стороны, можно считать, что  $ABCD$  — пространственный четырехугольник со сторонами  $AB$ ,  $BD$ ,  $DC$ ,  $CA$ . Поэтому

$$AB + CD = BD + AC. \quad (4)$$

Сопоставляя равенства (1) — (4) и полагая  $AB = a$ , получим две системы уравнений

$$\begin{cases} BD^2 + AC^2 = 2a^2, \\ BD + AC = 2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} BC^2 + AD^2 = 2a^2, \\ BC + AD = 2a. \end{cases}$$

Из этих систем легко следует, что длины всех ребер нашей пирамиды равны  $a$ . Очевидно, центр  $O$  шара, касающегося всех ребер, совпадает с центром правильного тетраэдра  $ABCD$ . Но  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ , где  $r_1$  — радиус вписанного шара, а  $r_2$  — радиус круга, вписанного в основание. Так как  $r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a$  и  $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ ,  $r^2 = \frac{1}{8}a^2$ . Отсюда  $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 2\sqrt{3}r^2$ .

**Задача 4.** Все плоские углы трехгранного угла  $SABC$  ( $S$  — вершина) прямые. На грани  $ASC$  взята точка  $D$  на расстоянии 5 от вершины  $S$  и на расстоянии 3 от ребра  $SC$ . Из некоторой точки  $M$ , расположенной внутри трехгранного угла  $SABC$ , в точку  $D$  направлен луч света. Луч образует угол  $\pi/4$  с ребром  $SB$  и угол  $\pi/3$  с ребром  $SC$ . Луч зеркально отражается от граней угла  $SABC$  сначала в точке  $D$ , затем — в точке  $E$ , затем — в точке  $F$ . Найдите длину отрезка  $EF$ .

**Решение.** Геометрическая идея решения состоит в «выпрямлении» траектории луча на основе законов отражения. Заметим, что если луч отражается зеркально от плоскости, то луч, симметричный относительно этой плоскости отраженному лучу, является продолжением падающего луча. На рисунке 8 изображена «вы-

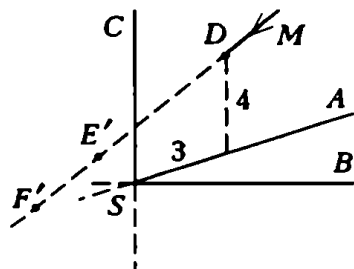


Рис. 8



прямленная» траектория нашего луча. Например, отрезок  $E'F'$  получен повторным отражением отрезка  $EF$  относительно плоскостей граней трехгранного угла. Из условия задачи следует, что точка  $D$  находится на расстоянии 4 от ребра  $SA$ . Так как длина проекции отрезка  $F'D$  на ребро  $SC$  равна 4, а угол между ними  $\pi/3$ ,  $F'D = 8$ . Значит, длина проекции отрезка  $F'D$  на ребро  $SB$  равна  $4\sqrt{2}$ . Так как сумма квадратов длин проекций отрезка на три взаимно перпендикулярные оси равна квадрату его длины, проекция отрезка  $F'D$  на ребро  $SA$  имеет длину 4. Отсюда видно, что наш луч сначала попадает на грань  $BSC$ , а затем на грань  $ASB$ . Точка  $S$  делит эту проекцию в отношении 1:3. Очевидно, точка  $E'$  делит отрезок  $F'D$  в том же отношении. Следовательно,  $E'F' = 2$ .

**Задача 5.** В пирамиде  $SABC$  прямая, пересекающая ребра  $AC$  и  $BS$  и перпендикулярная к ним, проходит через середину ребра  $BS$ . Грань  $ASB$  равновелика грани  $BSC$ , а площадь грани  $ASC$  в два раза больше площади грани  $BSC$ . Внутри пирамиды есть точка  $M$ , сумма расстояний от которой до вершин  $B$  и  $S$  равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найдите расстояние от точки  $M$  до вершины  $B$ , если  $AC = \sqrt{6}$ ,  $BS = 1$ .

**Решение.** Обозначим через  $K$  и  $N$  точки пересечения общего перпендикуляра к ребрам  $AC$  и  $SB$  с этими ребрами (рис. 9).

Достаточно очевидно, что решение задачи надо начинать с анализа тех ее условий, которые не касаются положения точки  $M$ . Из равновеликости граней  $ASB$  и  $BSC$  следует, что точки  $A$  и  $C$  находятся на одинаковом расстоянии от ребра  $SB$ .

Рассмотрим общую задачу о вычислении расстояния от точки  $A$ , лежащей на прямой (I), до прямой (II) (рис. 10). Обозначим через  $O_1$  и  $O_2$  основания общего перпендикуляра к прямым (I)

и (II),  $a = AO_1$ ,  $d = O_1O_2$ ,  $\varphi$  — угол между прямыми (I) и (II),  $h$  — расстояние от точки

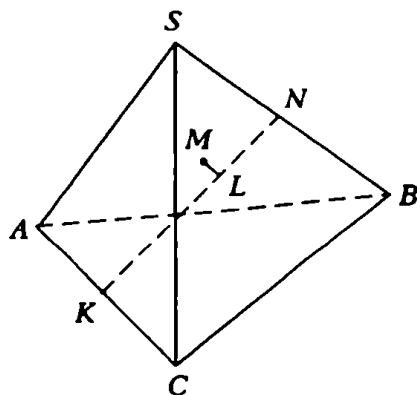


Рис. 9

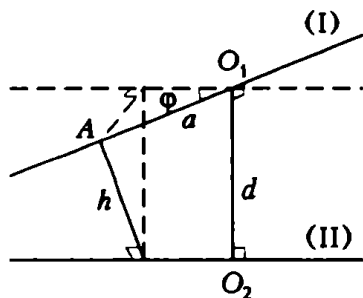


Рис. 10

А до прямой (II). Из рисунка 10 легко находим, что

$$h = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + d^2}, \quad (5)$$

Отсюда следует, что любые две точки прямой (I), находящиеся на равных расстояниях от прямой (II), находятся на равных расстояниях от основания общего перпендикуляра к этим прямым. Таким образом, точка  $K$  является серединой отрезка  $AC$ . Далее, точки  $S$  и  $B$  в силу формулы (5) оказываются одинаково удаленными от ребра  $AC$ , откуда следует, что грани  $ASC$  и  $ABC$  равновелики. Выведенная нами формула (5) позволяет также выписать площади граней  $ASC$  и  $BSC$ :

$$S_{ASC} = p = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varphi + d^2},$$

$$S_{BSC} = q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} \sin^2 \varphi + d^2}. \quad (6)$$

Из условия задачи  $p = 2q$  или

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \varphi + d^2} = \sqrt{\frac{3}{2} \sin^2 \varphi + d^2}, \quad (7)$$

откуда

$$d = \frac{3}{2} |\sin \varphi|. \quad (8)$$

Итак, задание угла  $\varphi$  между ребрами  $AC$  и  $SB$  полностью определяет пирамиду, удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме тех, в которых речь идет о точке  $M$ .

Заметим, что из наших рассмотрений следует также, что отрезок  $KN$  принадлежит биссекторным плоскостям двугранных углов пирамиды с ребрами  $AC$  и  $SB$ .

Перейдем теперь к анализу положения точки  $M$ . Особая роль отрезка  $KN$ , выявленная в предыдущем анализе, позволяет выдвинуть предположение, что точка  $M$ , удовлетворяющая условию задачи, лежит на этом отрезке. В этом мы сейчас и убедимся. Рассмотрим проекцию  $L$  точки  $M$  на отрезок  $KN$ . Точки  $L$  и  $M$  принадлежат плоскости, перпендикулярной отрезку  $KN$ , а следовательно, и биссекторным плоскостям двугранных углов пирамиды с ребрами  $AC$  и  $SB$ . Если плоскость перпендикулярна биссекторной плоскости двугранного угла, то сумма расстояний от любой ее точки внутри этого угла до граней есть величина постоянная. (Докажите это самостоятельно, пользуясь тем, что сумма расстояний от точки основания равнобе-

ренного треугольника до его боковых сторон есть величина постоянная.) Таким образом, суммы расстояний до всех четырех граней пирамиды от точек  $M$  и  $L$  равны. Обозначим эту сумму через  $l$  и вычислим ее. Пусть  $x = KL$  и  $V$  — объем пирамиды. Очевидно, сумма расстояний от точки  $N$  до граней  $ABC$  и  $ASC$  равна  $3V/p$ . Значит, сумма расстояний от точки  $L$  до тех же граней равна  $\frac{x}{d} \cdot \frac{3V}{p}$ . Аналогично вычисляется сумма расстояний от точки  $L$  до граней  $BSC$  и  $ASB$ : она равна  $\frac{d-x}{d} \cdot \frac{3V}{q}$ . Итак,  $l = \frac{x}{d} \cdot \frac{3V}{p} + \frac{d-x}{d} \cdot \frac{3V}{q}$ . Воспользовавшись формулой  $V = \frac{1}{6} \cdot AC \cdot BS \cdot KN \cdot |\sin \varphi|$  (выведите эту полезную формулу самостоятельно) и формулами (6) и (8), получим  $l = 2\sqrt{\frac{2}{5}}(d - x/2)$ .

С другой стороны,  $SM + BM \geq SL + BL$  (докажите!) и, следовательно,  $l \geq SL + BL$ . Но  $SL + BL = 2\sqrt{1/4 + (d-x)^2}$ , откуда

$$2\sqrt{\frac{2}{5}}(d-x) \geq 2\sqrt{1/4 + (d-x)^2}$$

или

$$0,9x^2 - 1,6dx + 0,6d^2 + 0,25 \leq 0. \quad (9)$$

В силу (8)  $d \leq 3/2$ , откуда дискриминант  $D$  квадратного трехчлена в (9) не превосходит нуля и, следовательно,  $D = 0$ ,  $d = 3/2$ ,  $x = 4/3$ , точка  $M$  совпадает с точкой  $L$  и

$$MB = \sqrt{1/4 + (d-x)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

В заключение заметим, что приведенные нами решения задачи нельзя рассматривать как образцы оформления письменной работы. Мы стремились лишь показать основные идеи и приемы решения, оставляя читателю подчас весьма существенные детали для самостоятельной доработки.

### Упражнения

1. В треугольной пирамиде  $SABC$  суммы трех плоских углов при каждой вершине  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны  $180^\circ$ . Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами  $SA$  и  $BC$ , если известно, что  $BC = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $AB = 6$ .

2. Все ребра треугольной пирамиды  $ABCD$  касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер  $AB$  и  $CD$ ,  $AC$  и  $BD$ ,  $AD$  и  $BC$ , равны. Угол  $DBC$  равен  $50^\circ$ , а угол  $BCD$  больше угла  $BDC$ . Найдите отношение площадей граней  $ABD$  и  $ABC$ .

3. Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, лежат три шара с радиусами 4, 4 и 5. Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Найдите радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен  $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$ .

4. В пирамиде  $SABC$  грани  $ASC$ ,  $BSC$  и  $ASB$  равновелики. Сумма расстояний от середины ребра  $BC$  до граней  $ASB$  и  $ASC$  в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины  $S$ . Внутри пирамиды есть точка  $M$ , полусумма расстояний от которой до вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра  $AS$  равна  $\sqrt{31/11}$ .

5. Основанием пирамиды  $ABCEH$  служит выпуклый четырехугольник  $ABCE$ , который диагональю  $BE$  делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра  $AB$  равна единице, длины ребер  $BC$  и  $CE$  равны. Сумма длин ребер  $AH$  и  $EH$  равна  $\sqrt{2}$ . Объем пирамиды равен  $1/6$ . Найдите радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде  $ABCEH$ .

### Прямая и плоскость

3.  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ . 4. 1. 5.  $1/3$ . 6.  $1:6$ .

### Расстояния между скрещивающимися прямыми

1.  $a \sin \alpha \sin \beta / \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$ .

2.  $3a/7$ . 3.  $a \sqrt{\cos \alpha} / \cos \frac{\alpha}{2}$ .

### Плоскость в пространстве

1.  $2x - y + z - 6 = 0$ .

2.  $z - 3 = 0$ . 3.  $x + z - 4 = 0$ . 4. 3. 5. 6)  $\pi/2$ . 6.  $\arccos(3\sqrt{330}/55)$ .

### Чертеж в стереометрических задачах

1.  $\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2})^3 \pi R^3$ . *Указание.* Нарисуйте сечение конуса плоскостью, проходящей через высоту конуса и центр одного из шаров, лежащих на основании.

2.  $\frac{1}{3}r(6 + \sqrt{3} + \sqrt{27 + 12\sqrt{3}})$ . *Указание.* Выразите через  $r$  сторону основания призмы и найдите радиус 4-го шара. Высота призмы есть сумма  $r$ , радиуса 4-го шара и высоты тетраэдра, вершинами которого являются центры шаров.

3.  $\frac{2}{3}r(8\sqrt{3} + \sqrt{37})$ . *Указание.* Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и центры обоих шаров.

4.  $1:tg^2 \alpha:1$ . *Указание.* Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — вторые точки касания шаров с гранями угла,  $M$  и  $N$  — основания перпендикуляров, опущенных из точек касания на ребро. Все элементы призмы  $AA_1MBB_1N$  определяются из условий. Воспользуйтесь теоремой о произведении отрезков секущей к шару.

5.  $5\sqrt{2}/96$ . *Указание.* Докажите, что точка  $O$  лежит на  $AC$ .

6.  $a/6$ . Указание. Рассмотрите сечение плоскостью, проходящей через центр шара, вершину одной из пирамид и перпендикулярной плоскости данного треугольника.

7.  $\arctg(\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)/6)$ . Указание. Если  $a$  — сторона основания пирамиды,  $R$  — радиус данного шара,  $\varphi$  — искомый угол, то  $\tg \varphi = 2R/a$ . Задача сводится к определению  $R$ , если известно  $a$ , для чего следует рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной ее основанию и проходящей через центры данного и вписанного шаров.

8.  $r(\sqrt{2}-1)$ . Указание. Воспользуйтесь чертежом к задаче 5 статьи. Решение аналогично решению задачи 5.

### Неожиданный ракурс

1. а) Плоскость  $\pi$ , параллельная прямым  $a$  и  $b$ ; б) прямая, лежащая в плоскости  $\pi$ . Указание. Рассмотрите две параллельные проекции: вдоль прямой  $a$  (или  $b$ ) и вдоль прямой, соединяющей точки пересечения плоскости  $\alpha$  с прямыми  $a$  и  $b$ .

2. Указание. Рассмотрите параллельную проекцию вдоль плоскости  $KLM$ .

3. Кроме данных ребер, а)  $SB$ ,  $SD$  и  $SE$  делятся соответственно в отношениях 3 : 4, 3 : 11 и 3 : 2, считая от вершины  $S$ ; б)  $SB$ ,  $SD$ ,  $AF$ ,  $FE$ ; отношения — 9 : 20, 9 : 23, 1 : 3, 1 : 9, соответственно.

4.  $\frac{8}{15}S$ ;  $\frac{4}{15}S$ .

5.  $1/3$ . 6.  $a\sqrt{10}/4$ .

7. Указание. Спроектируйте вдоль секущей плоскости.

8. 3. 9.  $7/36$ . 10.  $\arccos \frac{S_1^2 + S_2^2 - S^2}{2S_1S_2}$ . 11. 12.

### Эти «коварные» векторы

2. 1:1. 3.  $\sqrt{7/3}a$ . 4. 4.

5.  $\arccos \frac{|1 - \cos \alpha - \cos \beta|}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha}}$  при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta \leq \frac{\pi - \alpha}{2}$ ;

$\arccos \frac{|1 - \cos \alpha - \cos \beta|}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 4 \cos \beta}}$  при  $\frac{\pi}{2} < \alpha$ ,  $\frac{\pi - \alpha}{2} < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ ;

при  $0 < \alpha < \pi$ ,  $\beta > \frac{1}{2} \left| \alpha - \frac{\pi}{2} \right| + \frac{\pi}{4}$  задача имеет два решения, указанные выше.

### Правильная пирамида

1.  $\arctg \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}$ . 2.  $\arctg \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}}$ . 3.  $\frac{h^3 \sqrt{3}}{\cos^2 \alpha} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right)$ .

$$4. 2\operatorname{arctg} \frac{h}{\sqrt{3(h^2 - a^2)}}. \quad 5. l/\cos \varphi. \quad 6. \frac{4h^2 \sqrt{-\cos \varphi}}{1 + \cos \varphi}. \quad 7. \frac{2a^4}{a^4 - 4R^2}.$$

$$8. 4r^2 \cdot \frac{(1 + \sqrt{-\cos \alpha})^3}{(1 + \cos \alpha)\sqrt{-\cos \alpha}}. \quad 9. \frac{32}{2} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha.$$

### Высота пирамиды

3.  $b/c$ . 4.  $\left( \frac{a\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2a + \sqrt{2a^2 + 4b^2}} \right)^2$ . *Указание.* Покажите, что рассматриваемая пирамида обладает лишь одной парой взаимно перпендикулярных скрещивающихся ребер, и докажите, что плоскость искомого сечения параллельна этим взаимно перпендикулярным скрещивающимся ребрам.

5.  $2/3$ . *Указание.* Пусть  $SABC$  — данная пирамида. Покажите, что  $AB = AC = BS = SC$ ,  $AS = BC$ , и что высота  $SO$  пирамиды лежит в грани  $BSC$ . Докажите затем, что  $SA$  и  $BC$  — наибольшие ребра пирамиды. 6. 22.

### Где расположено основание высоты?

**Задачи** (приводится номер правильного ответа, а вслед за ним — указание)

1. а) 3 (основание высоты должно быть равноудаленным от вершин основания); б) 3 (по той же причине, что п. а)); в) 5 (основание высоты равноудалено от прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ); г) 2 (докажите, что основание высоты принадлежит одной из высот треугольника); д) 2; е) 6 (покажите, что  $\angle BAS = \angle BSC = 90^\circ$ , и воспользуйтесь п. а)); ж) 7; з) 1.

2. 3. 3. 2 (основание высоты — центр окружности, описанной вокруг  $ABCD$ ).

### Упражнения

1.  $\frac{3\sqrt{6}}{2} a^2$ . 2.  $1/2$ , если  $a = b$ ;  $\{b/(a+b), b/(a-b)\}$ , если  $a > b$ ;  $\{a/(a+b), a/(a-b)\}$ , если  $a < b$ .

3.  $\frac{1}{36} c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$ . 4.  $\frac{\sqrt{2}}{2} b^3$ . 5.  $\frac{\sqrt{6}}{2} a^3$ , если  $C'B \perp ABC$ ;  $\frac{\sqrt{15}}{4} a^3$  в противном случае.

### Задачи на площади и двугранные углы

1.  $\sqrt{Q(S^2 - Q^2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10} / 90$ . 2. 5. 3.  $\sqrt{p^2 / 12 + 4q^2}$ .

### Достраивание тетраэдра

1. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом и воспользуйтесь для каждой грани параллелепипеда теоремой, связывающей сумму квадратов сторон параллелограмма и сумму квадратов его диагоналей.

2. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом; для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы соответствующая грань получившегося параллелепипеда была ромбом.

3. а)  $\frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}$ ;

б)  $\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/2}$ .

4. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом. Учетверенный квадрат длины каждого ребра параллелепипеда выразите по теореме косинусов через длины диагоналей соответствующей грани и угол между ними. Затем к граням параллелепипеда примените теорему о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма и сумме квадратов длин его сторон.

### Задачи о пересечении тел

1. а)  $V/2$ ; б)  $2V/9$ ; в)  $12V/25$ .

2.  $\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) / \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2$  при  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . *Указание.* Рассмотрите прямоугольник, получающийся при пересечении тетраэдра плоскостью, перпендикулярной оси вращения и такой, что угол между его диагоналями  $\alpha$  (таких прямоугольников будет два). 3.  $(54 - 28\sqrt{2})/27$ . 4.  $2(2 - \sqrt{3})$ .

5.  $23a^3/32$ . 6. 3:11 (считая от вершины пирамиды). 7.  $1/6$ . *Указание.* Пусть одна грань двугранного угла пересекает какое-то ребро куба в точке  $M$ , а другая — другое ребро в точке  $N$ ; тогда эти ребра выходят непременно из одной вершины (обозначим ее  $A$ ), причем  $MA + NA = 1$ .

8.  $a\sqrt{6}/2$ . 9.  $\frac{9a^2h^2}{12h^2 + a^2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{12h^2 + a^2}/(a\sqrt{3})\right)$ . 10.  $abc/(ab + bc + ac)$ .

### Вспомогательный куб

1.  $2\arccos(\sqrt{2}/(2\sin\gamma))$ . Ответ может быть записан также в виде  $\arccos(\operatorname{ctg}^2\gamma)$ . 2.  $60^\circ$ .

3.  $\arccos((18 - \sqrt{2})/2)$ . 4.  $\operatorname{arctg}(\sqrt{37 \pm 6\sqrt{2}}/2)$ .

5.  $\frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \sin\phi$ . *Указание.* Тетраэдр  $SABC$  удобно расположить так, чтобы отрезки  $AC$  и  $BD$  были направлены вдоль ребер вспомогательного куба, а вершина  $S$  принадлежала боковой грани.

### Стереометрические задачи с шарами

1.  $a/8$ . 2. 4. 3.  $(\rho^2 - (R - r)^2) / (4(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2)$ . 4.  $(7 \pm 3\sqrt{3})/4$ ;  $(5 \pm \sqrt{3})/4$ . 5.  $(1 + 2\sqrt{2})\pi r^3/3$ . 6.  $R(5 \pm \sqrt{13})/3$ .

### Сфера, касающаяся ребер многогранника

1.  $\pi(3\sqrt{2} - 4)$ . 2.  $\pi a^3(15 - 8\sqrt{2})/12$ .

3. Центр шара находится в центре основания пирамиды.



$$4. 4\pi R^3(8\sqrt{3}-9)/27. \quad 5. 4r\sqrt{3}/3. \quad 6. a(2b-a)/\left(2\sqrt{3b^2-a^2}\right).$$

$$7. \frac{a\left(\sin\frac{\pi}{n}-\cos\alpha\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin\alpha}.$$

### Нестандартные задачи по стереометрии

1.  $3\sqrt{5}/2$ . *Указание.* Рассмотрите развертку пирамиды. 2.  $\sqrt{3}\operatorname{tg}40^\circ$ . *Указание.* Выразите расстояния между серединами противоположных ребер пирамиды через длины ребер. 3.  $68/3$ . *Указание.* См. решение задачи 3 статьи. 4.  $2\sqrt{3}$ . *Указание.* См. решение задачи 5 статьи. 5.  $(3-\sqrt{5})/4$ . *Указание.* Покажите, что условиями задачи пирамида определяется однозначно.

Приложение к журналу «Квант» №5/96

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

ВЫПУСК 3

Редактор *А.Ю.Котова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

*М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова*

ИБ № 20

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.

Заказ **2930**

117296 Москва, Ленинский пр., 64а

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

Чеховском полиграфическом комбинате

Комитета Российской Федерации по печати

142300 г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336, факс (272) 62-536